

### Lista nr 3

#### Granica i ciągłość funkcji jednej zmiennej rzeczywistej. Punkty nieciągłości funkcji.

**Zad.1** Sprawdzić istnienie granicy funkcji w punkcie obliczając granice jednostronne:

$$a) f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad x=1; \quad b) f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}, \quad x=2; \quad c) f(x) = \frac{3}{9-x^2}, \quad x=-3;$$

$$d) f(x) = 2^{2-x}, \quad x=2; \quad e) f(x) = 3^{\frac{1}{(2-x)^2}}, \quad x=2; \quad f) f(x) = \frac{e^x-1}{\frac{1}{e^x+1}}, \quad x=0.$$

**Zad.2** Obliczyć granice:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x + 1}{x - 4}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x + 1}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{27 - x^3}{x - 3}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x+3}}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}}; \quad 7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)^2}{\sqrt[3]{x^6} + 1}; \quad 8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + x} - x};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^x; \quad 10) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{x+2}; \quad 11) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{\left(1 + \frac{4}{x}\right)}; \quad 12) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^3 x}; \quad 14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}; \quad 15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{4x}; \quad 16) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}; \quad 17) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x(1 - \operatorname{tg} x)}{\cos 2x}.$$

**Zad.3** Narysować wykresy funkcji spełniających wszystkie podane warunki:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3, \quad \text{funkcja jest parzysta};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty;$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5;$$

**Zad.4** Zbadać ciągłość funkcji oraz naszkicować jej wykres. Jeżeli funkcja jest nieciągła, to określić rodzaj nieciągłości:

$$1) f(x) = \frac{1}{x+2}, \quad x_0 = 1; \quad 2) f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}, \quad x_0 = 0; \quad 3) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } 0 \leq x < 1; \\ 2 - x & \text{dla } 1 \leq x \leq 2 \end{cases};$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}; \quad 5) f(x) = \begin{cases} -\log_{1/2}(x+3) & \text{dla } -3 < x \leq -2 \\ \pi/2 & \text{dla } -2 < x \leq 0 \\ \operatorname{ar} \operatorname{ctg} x & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

**Zad.5** Dla jakich wartości rzeczywistych A i B funkcja

$$1) f(x) = \begin{cases} -2 \sin x & \text{dla } x < -\pi/2 \\ A \sin x + B & \text{dla } -\pi/2 \leq x < \pi/2; \\ \cos x & \text{dla } \pi/2 \leq x \end{cases}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} A(2 + e^{\frac{1}{x}}) & \text{dla } x < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 + e^{\frac{1}{x}}) & \text{dla } x = 0. \\ \frac{\sin Bx}{x} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

jest ciągła w zbiorze  $\mathbb{R}$ ?

Literatura pomocnicza:

M. Gewert, Z. Skoczylas „Analiza matematyczna 1” (przykłady i zadania)

M. Grabowski „Analiza matematyczna”

L. Włodarski, L. Kryszicki „Analiza matematyczna w zadaniach” (cz.I)

W. Stankiewicz "Zadania z matematyki dla WUT"