Lista nr 4

Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej. Pochodna funkcji. Ekstrema lokalne i globalne funkcji. Reguła de L'Hospitala. Wypukłość, wklęsłość i punkty przegięcia wykresu funkcji. Badanie przebiegu zmienności funkcji.

Zad. 1 Korzystając z reguł obliczania pochodnych obliczyć pochodne następujących funkcji:

$$1)\ y=5x^3-2x^2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x};\quad 2)\ y=x+3e^x+2\ln x;\quad 3)\ y=2tgx+\frac{5}{x^2};$$

$$4)\ y=\sin x-\arccos x;\quad 5)\ y=2^x-arcctgx+4\log_3 x;\quad 6)\ y=\frac{3x^2-4x}{4x^2+3};$$

$$7)\ y=\frac{x+e^x}{2x^2+1};\quad 8)\ y=xe^x;\quad 9)\ y=10x^3\ln x;\quad 10)\ y=5\sin(2x);\quad 11)\ y=\cos(\sin x);$$

$$12)\ y=\sin^2 x;\quad 13)\ y=e^{4x^5+7};\quad 14)\ y=(1+\sqrt[4]{x})tg(3x);\quad 15)\ y=\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x};\quad 16)\ y=tg3^x.$$

Zad. 2 Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji w punktach o podanej odciętej:

$$1)\ f(x)=\frac{e^x}{x+1},\quad x_0=0;\qquad 2)\ f(x)=arctg\frac{1-x}{1+x},\quad x_0=1.$$

Zad. 3 Obliczyć pochodne rzędu drugiego i trzeciego następujących funkcji:

$$1)\ y=3x^3;\quad 2)\ y=\arccos x;\quad 3)\ y=xe^{\sin x};\quad 4)\ y=-4x^4+7x^2+12x+6.$$

Zad. 4 Stosując regułę de L'Hospitala obliczyć granice:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^3-2x+x}{2x^2+3x};\quad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2^x+e^{-x}-2};\quad 3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{1-e^{\frac{1}{x}}};\quad 4)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^3};\quad 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}$$

$$6)\ \lim_{x\to 1^-}(1-x)\cdot\ln(1-x);\quad 7)\ \lim_{x\to\infty}(\pi-2arctgx)\cdot\ln x;\quad 8)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{tgx}{\ln(x-\frac{\pi}{2})};\quad 9)\ \lim_{x\to\infty}x(e^{1/x}-1).$$

Zad. 5 Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne następujących funkcji:

$$1)\ y=x^3-6x^2-9x-4;\quad 2)\ y=\frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1};\quad 3)\ y=x^2e^{-\frac{x^2}{2}};\quad 4)\ y=x^2\ln x.$$

Zad. 6 Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji w zadanym przedziale:

$$1)\ y=x-2\ln x\quad x\in<1,e>;\quad 2)\ y=x^4-2x^2+5\quad x\in<-2,2>;\quad 3)\ y=arctgx^2\ \text{w}\ R.$$

Zad. 7 Wyznaczyć przedziały wklęsłości i wypukłości oraz punkty przegięcia wykresu funkcji:

$$1)\ y=\frac{1+x}{1+x^2};\quad 2)\ y=\ln(x^2+1);\quad 3)\ y=x\ln\frac{1}{x};$$

Zad. 8 Wyznaczyć asymptoty wykresów:

$$1)\ y=\frac{3-x^2}{2-x};\quad 2)\ y=\frac{2x^2-1}{x^2};\quad 3)\ y=xarctgx.$$

Zad. 9 Zbadać przebieg zmienności funkcji:

1) $y = 3(x-1)(x+2)(x-\frac{1}{2})$;   2) $y = 4 - \frac{2}{x}$;   3) $\sqrt{2x - x^2}$;   4) $y = x \ln x$;   5) $y = x^2 e^x$.

Zad. 10 Obliczyć przybliżoną wartość następujących liczb:

1) $\sqrt[4]{16{,}64}$;   2) $\sqrt{8{,}76}$;   3) $(2{,}01)^2$;   4) $arctg(0{,}98)$;   5) $\sin 29^\circ$.

Zad.11 Drut o długości *a cm* rozcięto na dwie części. Z jednej utworzono kwadrat, a z drugiej koło. Jaka powinna być długość każdej z części, aby suma pól otrzymanych figur osiągnęła maksimum.

Zad.12 Jaki powinien być stosunek wymiarów puszki do konserw w kształcie walca, aby przy danej objętości *V* zużyć na jej wyrób jak najmniej blachy?