

Lista nr 5

Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej. Całki nieoznaczone i metody ich wyznaczania. Całki oznaczone.

Zad. 1 Korzystając z podstawowych własności całek nieoznaczonych oraz podstawowych wzorów rachunku całkowego wyznaczyć następujące całki:

$$1) \int (6x^2 - 2x^{\frac{2}{3}} + \frac{8}{x} - \frac{3}{x^2}) dx; \quad 2) \int \frac{x^2 - \sqrt{x^5} + 4\sqrt[4]{2x^3}}{\sqrt[3]{x}} dx; \quad 3) \int \frac{x^3 + 8}{x + 2} dx; \quad 4) \int \frac{(x^2 - 1)^3}{x^2} dx;$$
$$5) \int \operatorname{ctg}^2 x dx; \quad 6) \int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx; \quad 7) \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx; \quad 8) \int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx; \quad 9) \int 2^x e^x dx; \quad 10) \int \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx.$$

Zad. 2 Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie wyznaczyć całki:

$$1) \int \frac{xdx}{(x^2 + 3)^6}; \quad 2) \int e^{-3x} dx; \quad 3) \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx; \quad 4) \int xe^{-x^2} dx; \quad 5) \int \sin(2x - 3) dx; \quad 6) \int \operatorname{tg} x dx;$$
$$7) \int \frac{e^{3x}}{1 + e^{6x}} dx; \quad 8) \int x\sqrt{x^2 + 1} dx; \quad 9) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 2}}; \quad 10) \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx; \quad 11) \int \frac{\sqrt{2\operatorname{arctg} x - 2}}{1 + x^2} dx.$$

Zad. 3 Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części wyznaczyć:

$$1) \int xe^x dx; \quad 2) \int x^2 e^{3x} dx; \quad 3) \int x \cos x dx; \quad 4) \int x^2 \sin(4x) dx;$$
$$5) \int \operatorname{arctg} x dx; \quad 6) \int e^x \cos x dx; \quad 7) \int xe^{x^2} (x^2 + 1) dx; \quad 8) \int \frac{\sin \ln x}{x^2} dx.$$

Zad. 4 Obliczyć całki oznaczone:

$$1) \int_{-1}^1 x^3 dx; \quad 2) \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx; \quad 3) \int_3^5 \frac{xdx}{x^2 + 5}; \quad 4) \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx; \quad 5) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 5x \cos x dx; \quad 6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx.$$

Zad. 5 Obliczyć całki niewłaściwe:

$$1) \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x}}; \quad 2) \int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}; \quad 3) \int_{-3}^3 \frac{dx}{x^2 - 4}; \quad 4) \int_1^{+\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)^2 dx; \quad 5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{x^4 + 1}; \quad 6) \int_{-\infty}^0 e^{2+4x} dx.$$

Zad. 6 Obliczyć pole obszaru płaskiego ograniczonego krzywymi:

$$1) y = 3x^2 - 4x, \quad x = -1, \quad x = 1 \quad \text{i osi\u0105 } Ox; \quad 2) y = \sin x, \quad y = \cos 2x \quad \text{i osi\u0105 } Oy (x \geq 0);$$
$$3) y = x^2 - x - 6, \quad y = -x^2 + 5x + 14; \quad 4) y = x^3, \quad y^2 = x; \quad 5) xy = 4, \quad x + y = 5.$$

Literatura pomocnicza:

M. Gewert, Z. Skoczyła, „Analiza matematyczna 1” (przykłady i zadania)
W. Krysiński, L. Włodarski, „Analiza matematyczna w zadaniach” (część pierwsza)
M. Grabowski, „Analiza matematyczna”