Lista nr 5

Ciągi liczbowe. Ciąg, jego własności i granica, definicja liczby e. Metody wyznaczania granic.

Zad.1 Wypisać kilka początkowych wyrazów ciągu (a_n), którego wyraz ogólny określony jest wzorem:

$$a)\ a_n = \frac{2n+1}{n};\quad b)\ a_n = \frac{n+1}{(2n)!};\quad c)\ a_n = (-2)^n;\quad d)\ a_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Zad.2 Na podstawie znajomości kilku początkowych wyrazów podanych ciągów znaleźć wzory ogólne tych ciągów:

a) Firma budowlana buduje wieżowiec. Obliczono, ze nacisk jednopiętrowej konstrukcji na podłoże wynosi 2 jednostki (a_1=2), dwupiętrowej 4 jednostki (a_2=4), trzypiętrowej 8 jednostek (a_3=8),… Oprócz znalezienia wyrazu ogólnego powyższego ciągu oblicz nacisk dziesięciopiętrowej konstrukcji na podłoże.

b) Jan Kowalski budując piramidę na pierwszą warstwę zużył 200 cegieł (a_1=200). Na każdą następną zużywał o 25 cegieł mniej (a_2=175, a_3=150…). Oprócz znalezienia wyrazu ogólnego powyższego ciągu oblicz ile warstw wybuduje Kowalski mając do dyspozycji 650 cegieł.

$$c)\ (a_n) = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, ...);\quad d)\ (a_n) = (1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, ...);\quad e)\ (a_n) = (0,2,0,2,0,...).$$

Zad.3 Zbadać monotoniczność oraz ograniczoność następujących ciągów o wyrazie ogólnym:

$$a)\ a_n = \frac{2n+1}{n(n+1)};\quad b)\ a_n = \sqrt[n]{2} - 1;\quad c)\ a_n = \frac{n^2+1}{n!};\quad d)\ a_n = 2^n;\quad e)\ a_n = \ln n.$$

Zad.4 Oblicz granicę ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym:

$$a)\ a_n = \frac{n}{n+1};\quad b)\ a_n = \frac{4n-3}{6-5n};\quad c)\ a_n = \frac{2n^3-4n-1}{6n+3n^2-n^3};\quad d)\ a_n = \frac{4n^3-n+6}{2n^3-n^2+2n+1};$$

$$e)\ a_n = \frac{2^n+(-1)^n}{2^n+1};\quad f)\ a_n = \frac{(n^{20}+2)^3}{(n^3+1)^{20}};\quad g)\ a_n = \left(\frac{2n-3}{3n+1}\right)^2;\quad h)\ a_n = \frac{(2n-1)^3}{(4n-1)^2(1-5n)}.$$

Zad.5 Obliczyć granicę ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym:

$$a)\ a_n = \sqrt{n^2+n} - n;\quad b)\ a_n = \sqrt{3n^2+2n-5} - n\sqrt{3};\quad c)\ a_n = \frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^5+1}+1};\quad d)\ a_n = \sqrt[3]{n^3+4n^2} - n.$$

Zad.6 Obliczyć granicę ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym:

$$a)\ a_n = \frac{3^n-2^n}{4^n-3^n};\quad b)\ a_n = \frac{4\cdot 3^{2n}-7}{5\cdot 9^n+2};\quad c)\ a_n = \frac{2^{n+1}-3^{n-2}}{3^{n+2}};\quad d)\ a_n = \frac{1+3+...+(2n-1)}{2+4+...+2n}.$$

Zad.7 Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granicę ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym:

$$a)\ a_n = \sqrt[n]{5^n+4^n+3^n};\quad b)\ a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n};\quad c)\ a_n = \frac{\sin^2 n + 4n}{3n-1};\quad d)\ a_n = \sqrt[n]{2n^4+n^2+1}.$$

Zad.8 Obliczyć granicę ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym:

$$a)\ a_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n;\quad b)\ a_n = \left(\frac{n+5}{n}\right)^n;\quad c)\ a_n = \left(1-\frac{4}{n}\right)^{-n+3};\quad d)\ a_n = \left(\frac{n+3}{n-4}\right)^{3n+4};\quad e)\ a_n = \left(\frac{n^2+6}{n^2+2}\right)^{n^2}.$$

Zad.9 Obliczyć granicę ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym:

$$a)\ a_n = \frac{\log_2(n+1)}{\log_3(n+1)};\quad b)\ a_n = \frac{9^{\log_3 n}}{4^{\log_2 n}};\quad c)\ a_n = \frac{\log_2 n^5}{\log_8 n}.$$

Literatura pomocnicza:

M. Gewert, Z. Skoczylas „ Analiza matematyczna 1” (przykłady i zadania)
W. Krysicki, L.Włodarski „ Analiza matematyczna w zadaniach” (część pierwsza)
M. Grabowski „Analiza matematyczna”