Lista nr 4

Granica i ciągłość funkcji jednej zmiennej rzeczywistej. Punkty nieciągłości funkcji.

Zad.1 Sprawdzić istnienie granicy funkcji w punkcie obliczając granice jednostronne:

$$a)\ f(x)=\frac{x+1}{x-1},\quad x=1;\quad b)\ f(x)=\frac{x-2}{x^2-4},\quad x=2;\quad c)\ f(x)=\frac{3}{9-x^2},\quad x=-3;$$

$$d)\ f(x)=2^{\frac{1}{2-x}},\quad x=2;\quad e)\ f(x)=3^{\frac{1}{(2-x)^2}},\quad x=2;\quad f)\ f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1},\quad x=0.$$

Zad.2 Obliczyć granice:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x+1}{x-4};\quad 2)\ \lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x+1};\quad 3)\ \lim_{x\to 3}\frac{27-x^3}{x-3};\quad 4)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6};$$

$$5)\ \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x+3}};\quad 6)\ \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{1-\sqrt{1+tgx}};\quad 7)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2}{\sqrt[3]{x^6}+1};\quad 8)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x};$$

$$9)\ \lim_{x\to +\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^x;\quad 10)\ \lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x+2};\quad 11)\ \lim_{x\to +\infty}\sqrt[x]{\left(1+\frac{4}{x}\right)};\quad 12)\ \lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}};$$

$$13)\ \lim_{x\to \pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x};\quad 14)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x};\quad 15)\ \lim_{x\to 0}\frac{tg3x}{4x};\quad 16)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\sin x}{x};\quad 17)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{x(1-tgx)}{\cos 2x}.$$

Zad.3 Narysować wykresy funkcji spełniających wszystkie podane warunki:

$a)\ \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=3,$ funkcja jest parzysta;

$b)\ \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=3,\ \lim\limits_{x\to \infty} f(x)=-\infty;$

$c)\ \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to \infty} f(x)=5;$

Zad.4 Zbadać ciągłość funkcji oraz naszkicować jej wykres. Jeżeli funkcja jest nieciągła, to określić rodzaj nieciągłości:

$$1)\ f(x)=\frac{1}{x+2},\quad x_0=1;\quad 2)\ f(x)=\frac{\mathrm{tg}\,x}{x},\quad x_0=0;\quad 3)\ f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla } 0\le x<1 \\ 2-x & \text{dla } 1\le x\le 2\end{cases};$$

$$4)\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|} & \text{dla } x\neq 0 \\ 1 & \text{dla } x=0\end{cases};\quad 5)\ f(x)=\begin{cases} -\log_{1/2}(x+3) & \text{dla } -3<x\le -2 \\ \pi/2 & \text{dla } -2<x\le 0 \\ ar\,\mathrm{ctg}\,x & \text{dla } x>0.\end{cases}$$

Zad.5 Dla jakich wartości rzeczywistych A i B funkcja

$$1)\ f(x)=\begin{cases} -2\sin x & \text{dla } x<-\pi/2 \\ A\sin x+B & \text{dla } -\pi/2\le x<\pi/2; \\ \cos x & \text{dla } \pi/2\le x\end{cases}\qquad 2)\ f(x)=\begin{cases} A(2+e^{\frac{1}{x}}) & \text{dla } x<0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-}(2+e^{\frac{1}{x}}) & \text{dla } x=0. \\ \dfrac{\sin Bx}{x} & \text{dla } x>0\end{cases}$$

jest ciągła w zbiorze R?

Zad.6 Kowalski, chcąc zbudować konstrukcje dachu, wycina z bel o podstawie koła o promieniu R belki o podstawie prostokąta. Korzystając z twierdzenia Weierstrassa o przyjmowaniu kresów przez funkcję ciągłą na przedziale domkniętym sprawdzić, czy uda mu się wyciąć tak belkę o podstawie prostokąta, by pole tego prostokąta było największe?

Literatura pomocnicza:

M. Gewert, Z. Skoczylas „ Analiza matematyczna 1” (przykłady i zadania)
M. Grabowski „Analiza matematyczna”
L. Włodarski, L. Krysicki„Analiza matematyczna w zadaniach” (cz.I)
W. Stankiewicz "Zadania z matematyki dla WUT"