**Lista nr 5**

*Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej: definicja pochodnej, interpretacja geometryczna i fizyczna, podstawowe wzory różniczkowania. Twierdzenia o wartości średniej i ich zastosowania. Różniczka funkcji. Pochodne wyższych rzędów. Wartości ekstremalne. Pochodne wyższych rzędów. Reguła de L'Hospitala. Wypukłość, wklęsłość i punkty przegięcia wykresu funkcji. Badanie przebiegu zmienności funkcji.*

**Zad. 1** Korzystając z definicji obliczyć pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:

1) $y=\frac{1}{x}$, $x_0=2$; 2) $y=\sqrt{x}$, $x_0=3$; 3) $y=x^2+\left|x^2-4\right|$, $x_0=-2$;

4) $y=\begin{cases} x^2+x+1 & \text{dla } x\geq 1 \\ 3x^3 & \text{dla } x<1 \end{cases}$, $x_0=1$; 5) $y=\begin{cases} x\,arctg\frac{1}{x} & \text{dla } x\neq 0 \\ 0 & \text{dla } x=0 \end{cases}$, $x_0=0$.

**Zad. 2 O**bliczyć pochodne następujących funkcji:

1) $y=5x^3-2x^2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$; 2) $y=x+3e^x+2\ln x$; 3) $y=2\sqrt[5]{x}+\frac{5}{x^2}$; 4) $y=\sin x+\cos x$;

5) $y=2arctgx-arcctgx+\arccos x$; 6) $y=\frac{3x^2-4x}{4x^2+3}$; 7) $y=\frac{x+e^x}{2x^2+1}$; 8) $y=xe^x$; 9) $y=10x^3\ln x$;

10) $y=\cos(2x+1)$; 11) $y=\sin^2 x$; 12) $y=e^{4x^5+7}$; 13) $y=(1+\sqrt[4]{x})tg(3x)$; 14) $y=\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}$;

15) $y=x\sin(2^x)$; 16) $y=2^{3^x}$; 17) $y=e^{x^2}\ln x$; 18) $y=\sin(\cos\frac{1}{x})$; 19) $y=\frac{\ln(\sin x)}{\ln(\cos x)}$;

20) $y=\left[\log_3(x^2-1)\right]^2$; 21) $y=\sqrt[3]{arctg\frac{x+3}{4}}$; 22) $y=\frac{1}{18}\sin^6 3u$; 23) $y=x^x$; 24) $y=(\sin x)^x$.

**Zad. 3** Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażeń:

1) $\sqrt[4]{16{,}04}$; 2) $\sqrt{8{,}96}$; 3) $(2{,}01)^2$; 4) $arctg(0{,}98)$; 5) $\sin 29^\circ$; 6) $\ln 1{,}02$.

**Zad. 4** Do pomiaru wysokości wieży zamkowej zastosowano teodolit, którym można zmierzyć kąty z dokładnością $0{,}1^\circ$. Teodolit ustawiono w odległości *d=100m* od podstawy wieży i wycelowano na brzeg wierzchołka wieży. Kąt jaki tworzy oś teodolitu z poziomem wynosi $\alpha=35{,}7^\circ$. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć wysokość tej wieży?

**Zad. 5** Napisać równanie stycznej i normalnej do krzywej:

1) $y=x^2-4x+7$, w punkcie $P=(1{,}4)$; 2) $y=\frac{8a^3}{4a^2+x^2}$, w punkcie o odciętej $x_0=2a$.

**Zad. 6** Wyznaczyć kąt , pod jakim przecinają się krzywe:

1) $y=\frac{1}{x}$ i $y=\sqrt{x}$, $(x>0)$; 2) $y=4-x$ i $y=4-\frac{x^2}{2}$, $(x>0)$.

**Zad 7.** Sprawdzić, czy poniższe funkcje spełniają założenia twierdzenia Rolle'a w przedziale <-1,1> :

1) $f(x)=-x^2+1$; 2) $f(x)=1-|x|$.

**Zad 8.** Czy funkcja $f(x)=3x^2-5$ spełnia w przedziale <-2,0> założenia twierdzenia Lagrange'a? Jeśli tak, to wyznaczyć punkt *c*, o którym mowa w tezie tego twierdzenia.

**Zad. 9** Stosując regułę de L'Hospitala obliczyć granice:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{a^x+e^{-x}-2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{1-e^{\frac{1}{x}}}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^3}$; 5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{tgx}{\ln(x-\frac{\pi}{2})}$;

6) $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)\cdot\ln(1-x)$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-2arctgx)\cdot\ln x$; 8) $\lim\limits_{x\to 0^+}(ctgx-\frac{1}{x})$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2})$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$; 11) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x^2}$; 12) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{2x-\pi}$; 13) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$.

**Zad 10.** Wyznaczyć asymptoty wykresów funkcji określonych wzorami:

1) $y=\frac{3-x^2}{2-x}$; 2) $y=\frac{2x^2-1}{x^2}$; 3) $y=xarctgx$; 4)$y=x\ln\frac{2x}{x-2}$.

**Zad. 11** Obliczyć pochodne $f'(x), f''(x), f'''(x)$ następujących funkcji:

1) $y=3x^3$; 2) $y=\arccos x$; 3) $y=xe^{\sin x}$, 4)$y=\frac{2x}{x-1}$.

**Zad. 12** Wyznaczyć przedziały monotoniczności oraz ekstrema następujących funkcji:

1) $y=2x^3+3x^2-12x+1$; 2) $y=x^4-2x^2-5$; 3) $y=\sqrt{2x-x^2}$; 4) $y=x^2e^{-x}$,

4) $y=\frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$; 5) $y=arctgx$; 6) $y=x^2\ln x$.

**Zad. 13** Wyznaczyć przedziały wklęsłości i wypukłości oraz punkty przegięcia wykresu funkcji:

1) $y=\frac{1+x}{1+x^2}$; 2) $y=\ln(x^2+1)$; 3) $y=x\ln\frac{1}{x}$; 4) $y=xe^{-x}$.

**Zad. 14** Platforma wiertnicza jest zakotwiczona na morzu 10 km od brzegu. Ropa z tej platformy będzie dostarczana rurociągiem do rafinerii położonej nad brzegiem morza , 16 km od punktu najbliższego platformie. Koszt ułożenia 1 km rurociągu na dnie morza wynosi 200 000 euro, a na lądzie 100 000 euro. Do którego miejsca na brzegu należy doprowadzić rurociąg, aby koszt jego budowy był najmniejszy?

**Zad. 15** Dwa miasta *M1* i *M2* położone po przeciwnych stronach rzeki trzeba połączyć drogą z mostem prostopadłym do brzegów rzeki o prostoliniowych i równoległych brzegach. W którym miejscu należy wybudować most, aby droga łącząca te miasta miała najmniejszą długość? (odległość *M1* od rzeki *2km, M2* od rzeki *12km,* odległość między miastami zrzutowanymi na prostą *21km* )

**Zad. 16** Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji:

1) $y=x-2\ln x$ w $x\in<1,e>$; 2) $y=x^4-2x^2+5$ w $x\in<-2,2>$; 3) $y=arctgx^2$ w $R$.

**Zad. 17** Napisać wzór Taylora z resztą Lagrange'a dla podanych funkcji, punktów i *n*:

1) $f(x)=x^3,\ x_0=-1,\ n=4$; 2) $f(x)=e^x,\ x_0=0,\ n=5$.

**Zad. 18** Zbadać przebieg zmienności funkcji:

1)$y=\frac{1}{3}x^3-4x^2+15x-15$; 2)$y=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$; 3)$y=xe^x$; 4)$y=\frac{\ln x}{x}$; 5)$y=x-\sqrt{x+2}$.

Literatura pomocnicza:
M. Gewert, Z. Skoczylas „ Analiza matematyczna 1" (przykłady i zadania)
W. Krysicki, L.Włodarski „ Analiza matematyczna w zadaniach" (część pierwsza)
M. Grabowski „Analiza matematyczna"