

WYDZIAŁ MATEMATYKI, INFORMATYKI I EKONOMETRII
UNIwersytet Zielonogórski

Tomasz Bartnicki

Rozgrywane kolorowanie grafów

Promotor: dr hab. Jarosław Grytczuk

ROZPRAWA DOKTORSKA

ZIELONA GÓRA 2009

Spis treści

Wstęp	3
Zawartość i układ pracy	3
Imiona graczy – rozliczenie z przeszłością	4
Oznaczenia, definicje i konwencje	5
Podziękowania	7
1 Historia problemu i podstawowe fakty	9
1.1 Problem czterech kolorów	9
1.2 Kolorowanie map jako gra	10
1.3 Kolorowanie grafów jako gra	12
1.4 Podstawowe fakty i ważne obserwacje	13
2 Przegląd wyników	19
2.1 Możliwe strategie dla Jacka	19
2.2 Lepszy porządek	21
2.3 Lepsze kolorowanie	23
2.4 Daltonizm może pomóc	26
2.5 Strategia aktywacji	27
2.6 Drzewa i k -drzewa	29
2.7 Porządek za sześć złotych	32
3 Rozgrywane kolorowanie produktu kartezjańskiego grafów	37
3.1 Wartości dokładne	38
3.2 Gra kombinacyjna	41
3.3 Produkty drzew i grafów planarnych	46
4 Rozgrywane kolorowanie krawędzi grafów	51
4.1 Rozgrywany indeks chromatyczny	51
4.2 Aktywacja krawędziowa	53
4.3 Problemy otwarte	60

5 Gra w zalesianie	63
5.1 Rozgrywana lesistość grafów	63
5.2 Grafy 2-zdegenerowane	65
5.3 Acykliczność a zalesianie	67
5.4 Strategia aktywacji	70
5.5 Ograniczenie dolne	74
5.6 Uwagi końcowe i problemy otwarte	77
Spis literatury	79

Wstęp

Słowo *gra* funkcjonuje we wszystkich językach świata od niepamiętnych czasów. W języku polskim ma ono kilka znaczeń. Mówimy o grze na instrumencie muzycznym lub grze aktora na deskach teatru. Jednak nie o takich grach będzie ta rozprawa. Obowiązywać będzie tu trzecia definicja słowa *gra*, która w największym uproszczeniu brzmi: *gra jest to współzawodnictwo odbywające się według ściśle określonych reguł*.

Tematyka związana z grami, nie tylko stała się przedmiotem zainteresowania matematyków różnych specjalności, ale również przyczyniła się do powstania osobnej gałęzi matematyki – teorii gier. Okazało się bowiem, że przy pomocy gier można doskonale modelować zjawiska, w których dochodzi do konfliktu interesów dwóch lub więcej stron, a takie zdarzają się niezwykle często we wszystkich dziedzinach życia codziennego.

Różne rodzaje gier są od dawna przedmiotem zainteresowania kombinatoryków, w tym również specjalistów od teorii grafów. Grę, o której traktuje niniejsza rozprawa, wymyślono w roku 1981, a 10 lat później stała się przedmiotem intensywnych badań naukowych. Przez te niespełna 30 lat, czyli jak na matematykę bardzo krótki okres, osiągnięto w tej dziedzinie wiele znaczących rezultatów oraz postawiono szereg problemów, które wciąż czekają na rozwiązanie. Celem niniejszej pracy jest zaprezentowanie niektórych klasycznych wyników oraz nowych, osiągniętych przez autora.

Zawartość i układ pracy

Niniejsza rozprawa składa się z pięciu rozdziałów.

Rozdział pierwszy zawiera krótki rys historyczny problemu rozgrywanego kolorowania map, a później grafów. Omawiamy w nim reguły gry oraz definiujemy pojęcie rozgrywanej liczby chromatycznej, a następnie podajemy podstawowe fakty z nim związane.

Rozdział drugi stanowi kontynuację rozdziału pierwszego. Przedstawiamy w nim kilka klasycznych wyników wraz z dowodami. Dowody, które przedstawiamy

w tym rozdziale, są nowe bądź zaprezentowane w zupełnie nowy sposób. Kosztem ogólności niektórych twierdzeń zyskaliśmy pogładowość w prezentacji ich dowodów, co było zabiegiem w pełni świadomym. Wyniki z tego rozdziału zostały opublikowane w 2007 roku w pracy przeglądowej *The map-coloring game* w czasopiśmie *American Mathematical Monthly* ([9]).

Rozdział trzeci zawiera analizę gry na produkcie kartezjańskim dwóch grafów. Wyniki w nim zawarte pochodzą z pracy *Game chromatic number of Cartesian product graphs* opublikowanej w 2008 roku w czasopiśmie *Electronic Journal of Combinatorics* ([4]). Praca ta została napisana w wyniku realizacji polsko-słoweńskiego projektu, którego elementem było tygodniowe spotkanie robocze w Zielonej Górze w roku 2006.

Rozdział czwarty poświęcony jest rozgrywanemu kolorowaniu krawędzi, które jest naturalnym rozszerzeniem oryginalnego problemu. Prezentujemy w nim opis strategii aktywacji krawędziowej, która daje najlepsze znane górne oszacowanie na rozgrywany indeks chromatyczny grafów planarnych. Wynik ten został opublikowany w 2008 roku w pracy *A note on the game chromatic index of graphs* w czasopiśmie *Graphs and Combinatorics* ([5]).

Rozdział piąty zawiera górne i dolne oszacowania na rozgrywaną lesistość krawędziową grafu. Pokazujemy w nim, że parametr ten zachowuje się jak liniowa funkcja zwykłej lesistości. Wyniki z tego rozdziału zostały opublikowane w 2008 roku w pracy *The game of arboricity* w czasopiśmie *Discrete Mathematics* ([8]).

Imiona graczy – rozliczenie z przeszłością

Rozprawa dotyczy różnych wariantów pewnej dwuosobowej gry. Nie tak błahym, jak by się mogło wydawać, problemem był wybór imion graczy biorących w niej udział. Porównać można go nawet do dylematu, przed jakim stają rodzice nowo narodzonego dziecka, a który podwaja się, gdy rodzą im się bliźnięta.

Przed problemem tym stanąłem po raz pierwszy (będąc wtedy jeszcze studentem) w 2001 roku. Zainteresowałem się wówczas problematyką rozgrywanego kolorowania grafów i miałem wygłosić na ten temat swój pierwszy w życiu referat na seminarium naukowym. Zdecydowałem się wówczas sięgnąć do klasyki polskiej literatury dziecięcej ([32]) i nadać graczom imiona Jacek i Placek. Choć referat mój został dobrze przyjęty, to propozycja spolszczenia imion głównych bohaterów wzbudziła pewne kontrowersje, bowiem w anglojęzycznych publikacjach ([21],[26],[29],[30],[35]) funkcjonowały już od jakiegoś czasu tradycyjne imiona Alice i Bob. Niestety, zdecydowano bezwzględną mniejszością głosów (sic!), że na kolejnych referatach z tej tematyki obowiązywać będą skalkowane na język polski

angielskie imiona, których wymowa brzmiała z grubsza jak „alis” i „bop”. Także w mojej pracy magisterskiej ([3]) nie mogli pojawić się Jacek i Placek, więc zdecydowałem się na wersję „bezimienną”: gracz A i gracz B.

Również w angielskich pracach imiona Alice i Bob nie pojawiły się od razu. Twórca gry – Steven Brams zaproponował ([24]) nadanie graczom imion adekwatnych do ich celów w grze: Minimiser i Maximiser. Później Bodlaender ([14]), który niezależnie wymyślił tę grę, użył bezimiennych player 1 i player 2, przemianowanych potem na Player I i Player II ([23]), aż wreszcie od 1994 roku ([30]) zaczęto używać imion Alice i Bob.

We wszystkich referatach wygłaszanych w języku polskim (ale poza Zieloną Górą) konsekwentnie propagowałem (i nadal to robię) Jacka i Placka, a we wrześniu 2005 trafili oni wreszcie do artykułu w czasopiśmie popularnym „Delta” ([7]). Zupełnie przypadkiem zbiegło się to w czasie z wyborami parlamentarnymi (oraz późniejszymi prezydenckimi), po których to imiona Jacek i Placek nabrały nowego, politycznego wymiaru. Można powiedzieć, że historia niespodziewanie zatonęła koło, bo przecież pierwszy wynalazca gry – Steven Brams jest profesorem nauk politycznych. Warto przy tej okazji zaznaczyć, że natura gry, o której jest ta rozprawa, może być również interpretowana politycznie. Bardzo często (w życiu i polityce) dochodzi do sytuacji, w których dwie strony (na przykład partie polityczne) wspólnie realizują pewne zadanie według ściśle określonych zasad (na przykład umów koalicyjnych), ale tylko jedna z nich jest zainteresowana powodzeniem przedsięwzięcia, zaś druga (udając współpracę) chce za wszelką cenę doprowadzić do jego fiaska. Przez pewien czas byliśmy (wspólnie z moim promotorem) nawet przekonani, że taka była inspiracja autora. Szybko okazało się, że byliśmy w błędzie ([17]), gdyż jego motywacje były czysto matematyczne.

Podsumowując powyższe osobiste refleksje, nie mogłem postąpić inaczej! Mój związek emocjonalny z Jackiem i Plackiem jest tak silny, że musiałem oddać należne im miejsce w mojej rozprawie doktorskiej. Jako ciekawostkę dodam, że inna para dziecięcych bohaterów – Paweł i Gaweł również ma już za sobą swój matematyczny debiut ([12]).

Oznaczenia, definicje i konwencje

W niniejszej rozprawie stosujemy standardową i ogólnie przyjętą terminologię i notację teorii grafów. Jeżeli nie zaznaczono inaczej, to wszystkie grafy są grafami prostymi, czyli: skończonymi, bez pętli i krawędzi wielokrotnych. Wszystkie grafy izomorficzne utożsamiamy ze sobą, a zatem *klasą* lub *rodziną* grafów nazywamy dowolny zbiór grafów zamknięty na izomorfizm. Jeżeli nie zaznaczono inaczej, to

zbiór wierzchołków grafu G oznaczamy przez $V(G)$, zaś zbiór krawędzi przez $E(G)$. Jeżeli nie zaznaczono inaczej, to liczby oznaczane przez n, m, k, l, t są naturalne.

Dla zadanego grafu $G = (V, E)$ rozpatrujemy dwa rodzaje kolorowań. *Kolorowaniem wierzchołków* grafu G nazywamy przyporządkowanie $f : V(G) \rightarrow C = \{c_1, \dots, c_k\}$, zaś *kolorowaniem krawędzi* nazywamy przyporządkowanie $g : E(G) \rightarrow C = \{c_1, \dots, c_k\}$. Elementy zbioru C nazywamy *kolorami*.

Kolorowanie f wierzchołków grafu nazywamy *poprawnym* (ang. proper), jeżeli każdej parze sąsiednich wierzchołków przyporządkowuje ono różne kolory. Najmniejszą liczbę kolorów potrzebną do poprawnego pokolorowania wierzchołków grafu G nazywamy *liczbą chromatyczną* (ang. chromatic number) grafu G i oznaczamy przez $\chi(G)$.

Kolorowanie g krawędzi grafu nazywamy *poprawnym* (ang. proper), jeżeli każdej parze incydentnych krawędzi przyporządkowuje ono różne kolory. Najmniejszą liczbę kolorów potrzebną do poprawnego pokolorowania krawędzi grafu G nazywamy *indeksem chromatycznym* (ang. chromatic index) grafu G i oznaczamy przez $\chi'(G)$.

Nowe lub niestandardowe pojęcia definiujemy bezpośrednio przed ich pierwszym użyciem. Dla większości pojęć podajemy ich angielskie odpowiedniki bądź (w przypadku całkiem nowych pojęć) pierwowzory. Nie wydzielamy sekcji definicji, a jedynie wyróżniamy kursywą nowo wprowadzane pojęcia. Najważniejsze wyniki pracy zawarte są w twierdzeniach i lematach. Przy twierdzeniach podajemy nazwiska autorów i odsyłacz do literatury, a w przypadku własnych twierdzeń podany jest sam odsyłacz. Jeżeli dowód twierdzenia jest inny niż oryginalny to również podajemy odsyłacz. Dowody większości twierdzeń, lematów i faktów podajemy bezpośrednio po ich sformułowaniu. W niektórych przypadkach, dla uzyskania lepszej kompozycji pracy, kolejność twierdzenie potem dowód została świadomie odwrócona. Sformułowanie tezy stanowi wówczas naturalne podsumowanie poprzedzających ją rozważań.

Podziękowania

Dziękuję Profesorowi Mieczysławowi Borowieckiemu za wprowadzenie mnie do świata gier na grafach. Zainteresowanie mnie tą tematyką było strzałem w dziesiątkę. Dziękuję za wypromowanie mojej pracy magisterskiej, opiekę naukową w I i II semestrze moich studiów doktoranckich oraz jako prowadzącemu seminarium z matematyki dyskretnej, na którym mogłem wygłaszać swoje pierwsze referaty.

Dziękuję Profesorowi Aleksandrowi Grytczukowi za opiekę naukową w III, IV i V semestrze moich studiów doktoranckich oraz jako prowadzącemu seminarium z teorii liczb i kombinatoryki, na którym wielokrotnie poruszałem tematykę niniejszej rozprawy.

Dziękuję Zofii Miechowicz za wsparcie mentalne, cokolwiek to znaczy. Dziękuję również za cenne uwagi dotyczące mojej rozprawy, wielokrotną korektę oraz za nieocenioną pomoc przy wykonaniu rysunków.

Szczególnie dziękuję mojemu promotorowi Jarosławowi Grytczukowi. Za co? Gdybym chciał to tu napisać to moja rozprawa rozrosłaby się do niebezpiecznych rozmiarów, a i tak bym pewnie o czymś zapomniał. Więc powiem krótko. Dziękuję za wszystko!

Moja działalność naukowa była wielokrotnie wspierana finansowo, co w znacznym stopniu przyczyniło się do powstania niniejszej rozprawy. Pragnę z tego miejsca podziękować instytucjom, które wsparły mnie w ramach następujących projektów:

- grant promotorski „Rozgrywane kolorowanie grafów” Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego (N 201 2128 33),
- stypendium doktorskie na Uniwersytecie Zielonogórskim,
- stypendium w ramach projektu „Stypendia dla studentów studiów doktoranckich na Wydziale Matematyki, Informatyki i Ekonometrii UZ” współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego oraz ze środków budżetu państwa
- wsparcie finansowe w ramach projektu „Wsparcie finansowe dla studentów studiów doktoranckich kierunków ścisłych i technicznych UZ” współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego oraz ze środków budżetu państwa.

Dziękuję również instytucjom, które rozważyły możliwość przyznania mi wsparcia finansowego, ale z różnych powodów nie mogły mi go udzielić.

Rozdział 1

Historia problemu i podstawowe fakty

1.1 Problem czterech kolorów

Historia problematyki, którą zajmować się będziemy w niniejszej rozprawie sięga roku 1852. Studiujący wówczas w Londynie Francis Guthrie, wiedziony czysto praktycznymi względami, zadał swemu wykładowcy Augustowi De Morganowi następujące pytanie: jaka jest najmniejsza liczba kolorów, która wystarcza do poprawnego pokolorowania dowolnej mapy na płaszczyźnie? Poprawnego, czyli takiego, w którym każde dwa graniczące ze sobą państwa otrzymały różne kolory.

Korzystając z twierdzenia Eulera o wielościanach nietrudno stwierdzić, że 6 kolorów wystarcza. Nieco bardziej zaawansowaną techniką można zmniejszyć tę liczbę do 5. Z drugiej strony, istnieją mapy, dla których 3 kolory to za mało. I tak sformułowano hipotezę, którą zdała się potwierdzać praktyka: każdą mapę na płaszczyźnie lub sferze można poprawnie pokolorować przy użyciu czterech kolorów. Szybko stała się ona sławna, gdyż mimo prostego sformułowania nijak nie dawała się udowodnić ani też obalić.

Pierwszy „dowód” podał w 1879 roku Alfred Bray Kempe. Świat nauki uznał problem za rozwiązany, a autora dowodu uhonorowano nawet wieloma zaszczytami. Jednak w 1890 roku Percy John Heawood znalazł w dowodzie Kempego błąd na tyle poważny, że nie dało się go usunąć, i tak twierdzenie o czterech kolorach z powrotem stało się hipotezą. Po tym wydarzeniu zainteresowanie problemem wzrosło wielokrotnie. Przez kolejne dziesiątki lat wielu matematyków zmagало się z nim bezskutecznie. Osiągano pewne częściowe wyniki (na przykład podnoszono sukcesywnie liczbę państw na mapach, które na pewno dadzą się pokolorować 4 barwami), analizowano coraz większą liczbę nowych przypadków, jednak for-

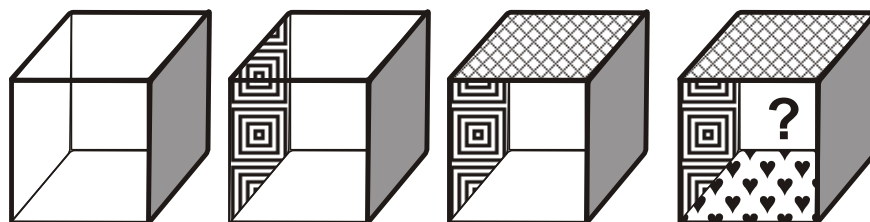
malny ścisły dowód nadal pozostawał poza zasięgiem ludzkich umysłów. Dopiero po upływie 124 lat w 1976 roku Kenneth Appel i Wolfgang Haken przedstawili wielostronicowy dowód polegający na redukcji problemu do wielogodzinnej komputerowej analizy około dwóch tysięcy pojedynczych przypadków.

Zamiast spodziewanego uczucia ulgi i radości, że ponad stuletni problem został w końcu rozwiązany, rozpętała się prawdziwa burza na pograniczu matematyki i filozofii. Zaczęto stawiać fundamentalne pytania. Co właściwie może być uznane za dowód twierdzenia? Czy dowód niemożliwy do weryfikacji przez człowieka może być uznany za poprawny? Na domiar złego okazało się, że dowód ów zawierał kilka istotnych luk. Jednak po kolejnych poprawkach i redukcji liczby przypadków, matematycy uznali twierdzenie o czterech kolorach za udowodnione. Pewien niedosyt jednak pozostał i z pewnością wielu matematyków nie ustanie w wysiłkach w poszukiwaniu „dowodu z Księgi” lub choćby takiego, że jego weryfikacja nie będzie wymagać użycia komputera.

1.2 Kolorowanie map jako gra

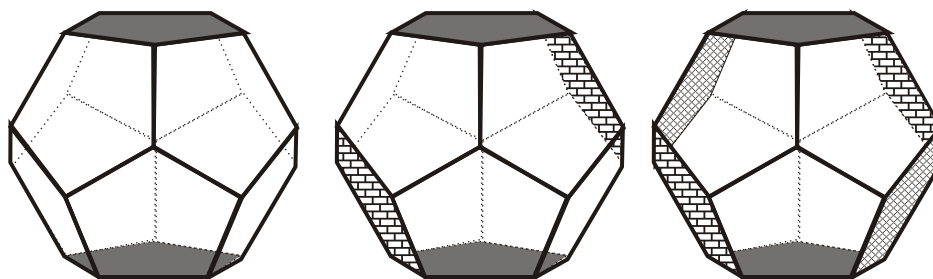
W roku 1981 profesor nauk politycznych z Uniwersytetu Nowojorskiego – Steven Brams wiedziony nadzieją, że da się w ten sposób znaleźć nowy, łatwiejszy dowód twierdzenia o czterech kolorach, postanowił problem kolorowania map nieco skomplikować. Wpadł on na pomysł, żeby kolorowanie mapy odbywało się jako dwuosobowa gra o bardzo prostych regułach. Dwaj gracze – Jacek i Placek (oryginalnie Minimizer i Maximizer) na przemian kolorują regiony (państwa) zadanej mapy, mając do dyspozycji ustalony (ten sam dla obu) zbiór kolorów. Grę rozpoczyna Jacek i jego celem jest takie wybieranie regionów i kolorów, aby cała mapa została poprawnie pokolorowana. Natomiast jego przeciwnik – Placek chce temu zapobiec. Obu graczy obowiązuje reguła poprawnego kolorowania, to znaczy, że w każdym momencie gry regiony pokolorowane, które graniczą ze sobą muszą mieć różne kolory. Jacek zwycięża, gdy cała mapa zostanie poprawnie pokolorowana, zaś Placek w przeciwnym przypadku. Ideę Bramsa opublikował w 1981 roku Martin Gardner w swojej popularnej rubryce *Mathematical Games* w czasopiśmie *Scientific American* ([24]). Zadał on również pytanie, o najmniejszą liczbę kolorów, która zapewni Jackowi zwycięstwo na dowolnej mapie.

Łatwo pokazać, że istnieją takie mapy, na których 4 kolory nie wystarczą Jackowi do zwycięstwa. Weźmy mapę, której regiony odpowiadają ścianom zwykłego sześcianu i rozważmy rozgrywkę przy użyciu kolorów ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$. Przypuśćmy, że Jacek w pierwszym swoim ruchu koloruje pewną ścianę kolorem 1. Placek odpowiada pokolorowaniem przeciwległej ściany kolorem 2, co spowoduje,



Rysunek 1.1: Rozgrywka na sześcianie

że kolory 1 i 2 nie mogą być już więcej użyte. Jacek musi więc w drugim ruchu użyć koloru 3, a Placek odpowiada kolorem 4 na przeciwległej ścianie i wygrywa grę (patrz rysunek 1.1).



Rysunek 1.2: Rozgrywka na dwunastościanie foremnym

W jednym z kolejnych numerów *Scientific American* ([24]) Lloyd Shapley pokazał, że również 5 kolorów nie zagwarantuje Jackowi zwycięstwa. Tym razem gra toczy się na modelu dwunastościanu foremnego przy użyciu kolorów ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Strategia Placka ponownie polega na tym, aby kolorować ścianę przeciwległą do tej, którą pokolorował Jacek w poprzednim ruchu. Tym razem robi on to zawsze tym samym kolorem, którego użył uprzednio Jacek. Patrząc na model dwunastościanu foremnego (rysunek 1.2) łatwo zauważyć, że Jacek jest zmuszony w każdym swoim ruchu używać nowego koloru, a co za tym idzie nie jest w stanie wygrać gry przy użyciu pięciu kolorów.

W następnym numerze ([24]) Robert High podał przykład 20-ściennej mapy (ponownie był to model bryły), dla której nawet 6 kolorów nie zagwarantuje Jackowi zwycięstwa. Jednocześnie postawił on hipotezę, że 7 kolorów wystarczy Jackowi do zwycięstwa na każdej mapie, choć z drugiej strony, nie było nawet wiadomo, czy jakkolwiek skończona liczba kolorów może mu to zagwarantować. Więcej publikacji w *Scientific American* na ten temat nie było, więc hipoteza

High'a pozostała otwarta.

1.3 Kolorowanie grafów jako gra

W 1991 roku Hans Bodlaender opublikował pracę ([14]), w której badał złożoność obliczeniową pewnych problemów związanych z kolorowaniem wierzchołków grafów. Jednym z nich była gra, której reguły były grafowym odpowiednikiem reguł zaproponowanych przez Bramsa. Dwaj gracze – Jacek i Placek na przemian (zaczyna Jacek) kolorują wierzchołki danego grafu G przy użyciu kolorów z ustalonego zbioru C . Obu graczy obowiązuje reguła poprawnego kolorowania, czyli sąsiednie wierzchołki muszą otrzymywać różne kolory. Celem Jacka jest uzyskanie poprawnego kolorowania całego grafu G i tylko w takim przypadku zwycięża. Placek chce temu zapobiec, to znaczy uzyskać takie częściowe pokolorowanie wierzchołków, którego nie da się rozszerzyć na cały graf G i wówczas on zostaje zwycięzcą. Bodlaender wprowadził parametr, zwany *rozgrywaną liczbą chromatyczną* (ang. game chromatic number) grafu, zdefiniowany jako najmniejsza liczba kolorów, dla której Jacek ma zwycięską strategię na grafie G (oznaczamy go obecnie przez $\chi_g(G)$). Postawił on też hipotezę, że χ_g jest skończona na klasie wszystkich grafów planarnych. Nie pokusił się jednak o podanie żadnej konkretnej stałej, która mogłaby być ograniczeniem, mimo że High próbował ją podać już 10 lat wcześniej.

Po tej publikacji specjaliści z teorii grafów żywo zainteresowali się problemem gry w kolorowanie. W 1994 roku Hal Kierstead i William Trotter ([30]) pozytywnie zweryfikowali hipotezę Bodlaendera podając pierwsze górne oszacowanie: $\chi_g(P) \leq 33$ dla dowolnego grafu planarnego P . Obalili przy okazji hipotezę Higha znajdując graf planarny dla którego 7 kolorów nie gwarantuje Jackowi zwycięstwa. W 5 lat później ukazała się praca Thomasa Dinsky'ego i Xudinga Zhu ([21]), w której podali oni zaskakująco prosty i elegancki dowód nieco lepszego oszacowania $\chi_g(P) \leq 30$. Wkrótce Zhu ([35]) obniżył to oszacowanie do 19, a następnie Kierstead ([29]) poprawił ten wynik do 18, używając skomplikowanej metody aktywacji. Aktualny rekord wynosi 17 kolorów i należy ponownie do Zhu ([36]). Biorąc pod uwagę dystans pomiędzy 8 a 17 oraz rosnącą komplikację stosowanych technik dowodowych należy sądzić, że wyścig ten nieprędko się skończy i pewnie jeszcze długo przyjdzie nam czekać na ostateczne rozwiązanie tego intrygującego problemu.

Przy tej okazji warto wspomnieć, że do 2007 roku we wszystkich publikacjach traktujących o grze w kolorowanie grafów jako jej twórca podawany był Bodlaender, mimo że 10 lat wcześniej, zupełnie niezależnie, grę tę wymyślił Brams. Rzecz jasna matematycy zawsze oddają należną cześć autorom problemów, a że tym ra-

zem tak się nie stało wynikało z tego, iż żaden z nich nie miał pojęcia o istnieniu pomysłów Stevena Bramsa opublikowanych w czasopiśmie popularnonaukowym.

Historia gry w kolorowanie została opublikowana po raz pierwszy w 2005 roku w miesięczniku *Delta* ([7]), a dwa lata później w *American Mathematical Monthly* ([9]).

1.4 Podstawowe fakty i ważne obserwacje

Gra w kolorowanie wierzchołów ma następujące własności:

- (i) jest grą skończoną, bo zbiór $V(G)$ jest skończony,
- (ii) jest grą deterministyczną, bo nie ma w niej elementów losowych,
- (iii) jest grą o pełnej informacji, bo zarówno graf G jak i zbiór C jest znany obu graczom, więc nie ma działania w niepewności,
- (iv) remis w grze nie jest możliwy.

Zatem dla danego grafu G i przy ustalonym zbiorze kolorów C jeden z graczy ma strategię wygrywającą.

Przez $\chi_g(G)$ oznaczamy będziemy *rozgrywaną liczbę chromatyczną* (ang. game chromatic number) grafu $G = (V, E)$, zdefiniowaną jako najmniejszą liczbę kolorów w zbiorze C , przy której Jacek ma strategię wygrywającą na grafie G . Zauważmy, że jeżeli $|C| = |V(G)|$, to dowolna strategia jest zwycięska dla Jacka, więc parametr $\chi_g(G)$ jest dobrze zdefiniowany. Bez konieczności wprowadzania dodatkowego oznaczenia możemy rozgrywaną liczbę chromatyczną zdefiniować dla dowolnej klasy grafów \mathcal{G} jako

$$\chi_g(\mathcal{G}) = \max\{\chi_g(G) : G \in \mathcal{G}\},$$

lub

$$\chi_g(\mathcal{G}) = \infty,$$

gdy to maksimum nie istnieje.

Powstaje naturalny problem wyznaczenia $\chi_g(\mathcal{G})$ dla różnych klas grafów. W celu oszacowania $a \leq \chi_g(\mathcal{G}) \leq b$ konieczne będzie znalezienie dwóch strategii. Dla pokazania górnego oszacowania należy znaleźć strategię gry dla Jacka przy użyciu b kolorów, która prowadzi do zwycięstwa na dowolnym grafie $G \in \mathcal{G}$. Dla pokazania dolnego oszacowania należy podać przykład grafu $G_0 \in \mathcal{G}$ oraz strategii dla Placka, która uniemożliwia pokolorowanie grafu G_0 przy użyciu mniej niż a kolorów. Oczywiście gdyby $a = b$, wówczas wyznaczona zostałaby dokładna wartość $\chi_g(\mathcal{G})$, lecz może to być zadanie niezwykle trudne. Pierwsze tego typu trywialne oszacowanie jest następujące.

Fakt 1.1. Dla dowolnego grafu G zachodzą nierówności

$$\chi(G) \leq \chi_g(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Dowód. Jest oczywiste, że aby istniała strategia wygrywająca dla Jacka w grze na grafie G i ze zbiorem kolorów C , to musi istnieć poprawne kolorowanie wierzchołków grafu G przy użyciu kolorów z C , a zatem musi ich być co najmniej tyle, ile wynosi liczba chromatyczna tego grafu.

Z drugiej strony, jeżeli gracze mają do dyspozycji $\Delta(G) + 1$ kolorów, to Jacek może stosować trywialną strategię, polegającą na tym, że w każdym swoim ruchu wybiera dowolny niepokolorowany wierzchołek i nadaje mu kolor, różny od kolorów wszystkich jego sąsiadów. Ponieważ wierzchołek może mieć co najwyżej $\Delta(G)$ sąsiadów, a do dyspozycji jest $\Delta(G) + 1$ kolorów, to cały graf zostanie poprawnie pokolorowany. \square

Bezpośrednią konsekwencją powyższej nierówności jest.

Fakt 1.2. Jeżeli K_n oznacza graf pełny na n wierzchołkach, to

$$\chi_g(K_n) = n,$$

ponadto jeżeli graf G zawiera K_n jako podgraf, to

$$\chi_g(G) \geq n.$$

Łatwo też wyznaczyć $\chi_g(G)$ dla grafów o maksymalnym stopniu wierzchołka równym 2, czyli cykli i ścieżek.

Fakt 1.3. Jeżeli P_n oznacza ścieżkę na n wierzchołkach, to

$$\chi_g(P_n) = \begin{cases} 1, & \text{dla } n = 1, \\ 2, & \text{dla } n = 2, 3, \\ 3, & \text{dla } n \geq 4. \end{cases}$$

Dowód. Dla $n = 1, 2$ jest to oczywiste.

Dla ścieżki na trzech wierzchołkach Jackowi wystarczą 2 kolory, o ile tylko zacznie kolorowanie od środkowego wierzchołka.

Dla $n \geq 4$ dwa kolory nie wystarczą Jackowi do zwycięstwa. W swoim pierwszym ruchu Placek zawsze znajdzie niepokolorowany wierzchołek odległy o 2 od wierzchołka pokolorowanego przez Jacka i nada mu drugi z dostępnych kolorów, a wówczas środkowy wierzchołek będzie mieć sąsiadów w obu dostępnych kolorach. Przy trzech kolorach zwycięża Jacek (fakt 1.1), co kończy dowód. \square

Fakt 1.4. Jeżeli C_n oznacza cykl na n wierzchołkach, to

$$\chi_g(C_n) = 3.$$

Dowód. Cykl C_3 jest trójkątem, czyli grafem pełnym. Dla dłuższych cykli argument jest taki sam, jak dla ścieżek. \square

W szczególności $\chi_g(C_4) = 3$. Rozważmy rozgrywkę na grafie $G = K_1 \cup C_4$ (będącym rozłączną sumą cyklu i wierzchołka izolowanego) przy użyciu jedynie dwóch kolorów. Jacek może w łatwy sposób wygrać grę, rozpoczynając ją od pokolorowania wierzchołka izolowanego. Spowoduje to, że Placek będzie zmuszony do wykonania swojego pierwszego ruchu na cyklu C_4 . Jacek w odpowiedzi używa tego samego koloru na przeciwległym wierzchołku i wygrywa grę, więc $\chi_g(G) = 2$.

Powyższy przykład prowadzi do pierwszej bardzo ważnej obserwacji. Rozgrywana liczba chromatyczna nie jest monotoniczna ze względu na branie podgrafów, czyli z faktu, że $H \subseteq G$ nie wynika nierówność $\chi_g(H) \leq \chi_g(G)$. Anomalia ta wprowadza znaczne utrudnienie w badaniu rozgrywanej liczby chromatycznej, gdyż żadne lokalne strategie nie mogą być zastosowane globalnie i odwrotnie. W praktyce utrudnia to, bądź wręcz uniemożliwia, stosowanie technik indukcyjnych w dowodach twierdzeń.

Kolejne dwa przykłady pokażą, że niemonotoniczność rozgrywanej liczby chromatycznej ma charakter o wiele szerszy. Niech $K_{n,n}$ oznacza graf pełny dwudzielny. Załóżmy, że $K_{n,n} = (U \cup V, E)$, gdzie U i V są zbiorami wierzchołków niezależnych postaci $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ i $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Fakt 1.5. Jeżeli $n \geq 2$, to $\chi_g(K_{n,n}) = 3$.

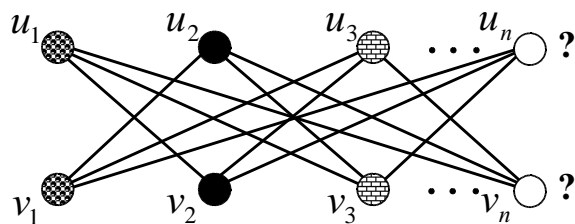
Dowód. Jasne jest, że dwa kolory nie wystarczą Jackowi do zwycięstwa, bo jeżeli w pierwszym ruchu pokolorował on wierzchołek v_1 kolorem 1, to Placek może pokolorować wierzchołek v_2 kolorem 2.

Jeśli jednak gracze mają do dyspozycji trzy kolory, to Jacek może w swoim drugim ruchu pokolorować dowolny wierzchołek z U kolorem 3. Prowadzi to do jego wygranej, gdyż w toku dalszej gry, wierzchołki z V będą mogły dostawać kolory 1 lub 2, zaś wierzchołki z U kolor 3. \square

Rozważmy graf $K_{n,n} - nK_2$ (patrz rysunek 1.3), który powstaje po usunięciu z pełnego grafu dwudzielnego $K_{n,n}$ skojarzenia doskonałego (ang. perfect matching), czyli wszystkich krawędzi postaci $v_i u_i$, dla $i = 1, \dots, n$.

Fakt 1.6. Dla dowolnego n zachodzi równość

$$\chi_g(K_{n,n} - nK_2) = n.$$



Rysunek 1.3: Rozgrywka na na grafie $K_{n,n} - nK_2$

Dowód. Jeżeli w grze będzie dostępnych mniej niż n kolorów, to Placek ma strategię wygrywającą. Załóżmy, że Jacek koloruje w pierwszym ruchu wierzchołek v_1 kolorem 1. Odpowiedzią Placka jest pokolorowanie wierzchołka u_1 kolorem 1, a może to zrobić, bo krawędź v_1u_1 została z grafu $K_{n,n}$ usunięta. W tej sytuacji kolor 1 nie może już być więcej użyty przez żadnego z graczy, gdyż wszystkie niepokolorowane wierzchołki mają sąsiada w kolorze 1. W dalszej grze Placek postępuje analogicznie (patrz rysunek 1.3). Ilekroć Jacek nada kolor c wierzchołkowi v_i lub u_i , Placek nadaje kolor c odpowiednio u_i lub v_i . Zmusza to Jacka do użycia nowego koloru w każdym kolejnym ruchu i prowadzi do zwycięstwa Placka. Jeżeli w grze dostępnych będzie n kolorów, to zwycięża Jacek (fakt 1.1), co kończy dowód. \square

Podsumujmy poczynione w tym podrozdziale obserwacje.

- (1) Z faktu, że $H \subseteq G$ nie wynika nierówność $\chi_g(H) \leq \chi_g(G)$ i to nawet w przypadku, gdy ograniczymy się tylko do podgrafów rozpinających bądź indukowanych.
- (2) χ_g jest nieograniczona na klasie wszystkich grafów dwudzielnych.
- (3) Różnica $\chi_g(G) - \chi(G)$ może być dowolnie duża.
- (4) χ_g nie da się ograniczyć z góry przez żadną funkcję χ .

Na zakończenie wspomnijmy o jeszcze jednym niecodziennym problemie, który po raz pierwszy dostrzegł i postawił Xuding Zhu ([35]). Załóżmy, że Jacek ma na pewnym grafie G strategię wygrywającą w grze z użyciem k kolorów. Czy Jacek ma również strategię wygrywającą na grafie G , jeżeli w grze będzie dostępnych $k + 1$ kolorów?! Pytanie to na pierwszy rzut oka wydaje się absurdalne. Czy możliwe jest, aby zwiększenie liczby kolorów mogło zaszkodzić Jackowi w rozgrywce na tym samym grafie? Intuicyjnie można postawić hipotezę, że zwiększenie liczby kolorów nie może być dla Jacka niekorzystne, lecz jak do tej pory nikomu nie udało się tego udowodnić poza przypadkiem $k = 2$ ([16]). Oczywiście wszystkie narzucające się indukcyjne rozwiązania, polegające na utożsamieniu dwóch kolorów i

kopiowaniu strategii, po krótkiej analizie okazują się być błędne. Jeszcze większym zaskoczeniem jest, że o wiele słabsza hipoteza również pozostaje otwarta.

Hipoteza 1 (Zhu [35]). *Istnieje taka funkcja $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, że na dowolnym grafie, dla którego Jacek ma strategię zwycięską w grze przy użyciu k kolorów, ma on również strategię zwycięską w grze przy użyciu $f(k)$ i każdej większej liczby kolorów.*

Intuicja podpowiada nam, że $f(k) = k + 1$, lecz nikt do tej pory nie potrafił tego pokazać.

Rozdział 2

Przegląd wyników

W rozdziale tym zaprezentujemy kilka najważniejszych znanych górnych oszacowań na rozgrywaną liczbę chromatyczną. Staraliśmy się wybrać takie, które dadzą najlepszy przegląd strategii wymyślonych w przeszło piętnastoletniej historii rozgrywanego kolorowania grafów. Wyniki te były publikowane w renomowanych czasopismach ([14], [21], [23], [29], [30], [35]), gdyż każdy z nich można uznać za przełomowy. Warto podkreślić, że zarówno wszystkie zawarte w tym rozdziale opisy strategii jak i dowody ich poprawności (opublikowane w pracy przeglądowej [9]) zostały napisane niemal w całości „od podstaw”, z położeniem szczególnego nacisku na pogłębienie i przejrzystość oraz przystępność, nawet dla czytelnika niebędącego specjalistą w dziedzinie rozgrywanego kolorowania grafów.

2.1 Możliwe strategie dla Jacka

Rozważmy rozgrywkę na pewnym grafie G przy użyciu k kolorów z ustalonego zbioru C i zastanówmy się, jak Jacek powinien zaplanować jej przebieg, aby odnieść zwycięstwo. Zauważmy, że każdy pokolorowany przez Placka wierzchołek v stanowi zagrożenie dla wszystkich jego niepokolorowanych sąsiadów, gdyż Placek dąży do sytuacji, w której w sąsiedztwie niepokolorowanego wierzchołka pojawią się wierzchołki we wszystkich dostępnych kolorach. Jacek w swoim ruchu może starać się zniwelować to zagrożenie, kolorując wierzchołek w sąsiedni z wierzchołkiem v , ale pozostałe niepokolorowane sąsiedztwo wierzchołka v nadal pozostaje zagrożone, a ponadto wierzchołek w stwarza nowe zagrożenie dla kolejnych swoich niepokolorowanych sąsiadów. Zatem Jacek powinien tak zaplanować swoje ruchy, aby zagrożenia niwelować w takiej kolejności, która nigdy nie doprowadzi go do pozycji przegrywającej. W poprzednim rozdziale pokazaliśmy, że rozgrywana liczba chromatyczna nie daje się ograniczyć z góry przez żadną funkcję zwykłej lic-

by chromatycznej. Mogłoby to sugerować, że znajomość poprawnego kolorowania grafu G , nie będzie pomocna Jackowi przy planowaniu strategii w rozgrywce z Plackiem. Pokażemy dalej, że w niektórych przypadkach nie musi to być prawdą, wskazując strategię, w której kluczową rolę odgrywa właśnie poprawne kolorowanie grafu, na którym ma toczyć się gra.

Ogólna idea jest następująca. Niech $\chi(G) = k$ oraz niech $f : V(G) \rightarrow \{c_1, \dots, c_k\}$ będzie optymalnym kolorowaniem. W trakcie rozgrywki gracze będą używać kolorów ze zbioru

$$C = \bigcup_{i=1}^k C_i = \{c_i^j : i \in [k], j \in [t]\},$$

gdzie każdy ze zbiorów C_i składa się z t różnych *odcieni* koloru c_i . Zakładamy, że zbiory C_i są parami rozłączne, zatem $|C| = tk$. Mówimy, że kolor c jest *dobry* dla wierzchołka v , gdy jest on jednym z odcieni koloru $f(v) = c_i$ (czyli gdy $c = c_i^j \in C_i$), każdy inny kolor jest *zły* dla tego wierzchołka. Główne założenie strategii Jacka jest takie, aby w każdym swoim ruchu kolorował on wybrany wierzchołek v dobrym kolorem. Da mu to gwarancję, że żaden z jego wcześniejszych ruchów nie będzie kolidował z następnymi. Jedynym problemem pozostanie, zatem ograniczenie maksymalnej liczby źle pokolorowanych (przez Placka) wierzchołków sąsiednich z wierzchołkiem niepokolorowanym. Jacek musi zadbać o to, aby w każdym momencie gry, każdy niepokolorowany wierzchołek v był sąsiedni z mniej niż t wierzchołkami pokolorowanym przez Placka jednym z odcieni $f(v)$.

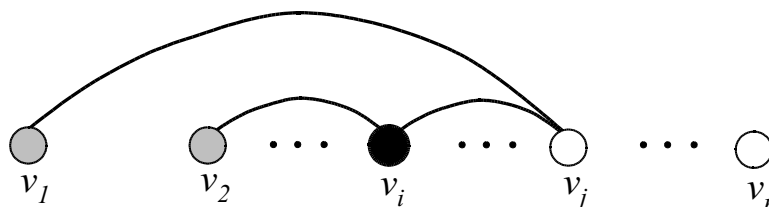
W zwykłym (nierozgrywanym) kolorowaniu grafów istnieje dobrze znana strategia kolorowania, dzięki której możemy ograniczyć liczbę chromatyczną grafu przez jego *liczbę kolorującą* (ang. coloring number) $\text{col}(G)$ zdefiniowaną jako najmniejsze takie k , że każdy podgraf grafu G zawiera wierzchołek o stopniu mniejszym od k . Polega ona na tym, że Jacek ustawia wierzchołki grafu w porządku v_1, \dots, v_n w taki sposób, aby każdy z nich miał mniej niż k sąsiadów o niższych numerach. Robi to od końca, wrywając z grafu wierzchołki o stopniu mniejszym niż k . Następnie koloruje je kolejno przy użyciu k kolorów, używając za każdym razem dowolnego dostępnego koloru. Kolorowanie takie nie musi być optymalne, jednak daje nam górne ograniczenie na liczbę chromatyczną: $\chi(G) \leq \text{col}(G)$. Zauważmy, że strategii tej nie da się zastosować, jeśli założymy, że co drugi ruch będzie należał do Placka. Jacek może, w odpowiedzi na ruch Placka, próbować pokolorować sąsiedni wierzchołek o najniższym numerze. Choć liczba sąsiadów wierzchołka, o niższych numerach jest ograniczona przez k , to liczba jego pokolorowanych sąsiadów o numerach wyższych może rosnąć nieograniczenie. Mimo że porządek wynikający z $\text{col}(G)$ okazał się bezużyteczny w rozgrywce, to sama idea odpowiedniego uporządkowania wierzchołków znalazła zastosowanie w pro-

blemach rozgrywanego kolorowania grafów.

2.2 Lepszy porządek

Założmy, że wierzchołki grafu G zostały uporządkowane kolejno v_1, v_2, \dots, v_n . Wierzchołek v_h będziemy nazywać *wstępnym* (ang. loose backward neighbor) wierzchołka v_i , jeżeli $h < i$ oraz zachodzi któryś z następujących warunków (patrz rysunek 2.1):

- (a) v_h jest sąsiedni z v_i ,
- (b) wierzchołki v_h i v_i mają wspólnego sąsiada v_j takiego, że $h < i < j$.



Rysunek 2.1: Wstępnymi wierzchołkami v_i są wierzchołki v_1 i v_2

W konkretnym porządku możemy dla każdego wierzchołka znaleźć liczbę jego wstępnych, a następnie wyznaczyć maksimum tych liczb. Szukamy porządku, dla którego to maksimum będzie możliwie najmniejsze. *Drugą liczbą kolorującą* (ang. 2-coloring number) grafu G (oznaczaną przez $\text{col}_2(G)$) nazywamy najmniejszą liczbę całkowitą k taką, że istnieje taki porządek wierzchołków grafu G , że każdy wierzchołek posiada w nim mniej niż k wstępnych.

Parametr col_2 jest modyfikacją pojęcia *aranżowalności* (ang. arrangeability) grafu, wprowadzonego przez Chena i Shelpa ([20]). Wykorzystali je oni do pokazania, że pewna ważna w teorii Ramseya hipoteza (postawiona w 1977 roku przez Burra i Erdősa ([18]), a w ogólności do dziś nierozstrzygnięta) jest prawdziwa dla grafów planarnych. Ich kluczowym wynikiem było pokazanie, że $\text{col}_2(P) \leq 761$ dla dowolnego grafu planarnego P , przy czym nie przywiązywali oni wagi do wielkości stałej ograniczającej, a jedynie do jej istnienia.

Kierstead i Trotter zauważyli ([30]), że pojęcie aranżowalności odgrywa również kluczową rolę w ograniczeniu rozgrywanej liczby chromatycznej grafów planarnych.

Twierdzenie 2.1 ([9]). *Dla dowolnego grafu G zachodzi nierówność*

$$\chi_g(G) \leq \chi(G)(1 + \text{col}_2(G)).$$

Dowód. Niech $\chi(G) = k$ i $\text{col}_2(G) = t$. Przed rozgrywką Jacek ustala optymalne kolorowanie $f : V(G) \rightarrow \{c_1, \dots, c_k\}$ oraz porządek wierzchołków v_1, \dots, v_n , który realizuje równość $\text{col}_2(G) = t$. Zarówno kolorowanie jak i porządek mogą być znane również Plackowi, ale informacja ta nie przyniesie mu korzyści. W trakcie rozgrywki gracze będą używać kolorów ze zbioru C , składającego się z $t + 1$ różnych odcieni każdego z k wyjściowych kolorów c_i , a zatem $|C| = k(1 + t)$ (patrz podrozdział 2.1). Zwycięska strategia dla Jacka polega na zastosowaniu się do poniższych zasad:

- (i) Jacek w każdym swoim ruchu koloruje pewien wierzchołek dobrym kolorem,
- (ii) jeżeli Placek pokolorował wierzchołek v_j , to Jacek w kolejnym swoim ruchu koloruje sąsiedni z nim wierzchołek v_h o możliwie najniższym numerze i taki, że $h < j$,
- (iii) jeżeli taki wierzchołek nie istnieje, to Jacek koloruje wierzchołek niepokolorowany o najniższym numerze.

Wystarczy pokazać, że na każdym etapie gry (zarówno po ruchu Jacka jak i Placka), dla dowolnego niepokolorowanego wierzchołka v_i będzie istniał dobry dla niego kolor (czyli w odcieniu $f(v_i)$), który będzie różny od wszystkich kolorów jego sąsiadów. Zauważmy, że jeżeli w sąsiedztwie niepokolorowanego wierzchołka v_i pojawiły się groźne wierzchołki pokolorowane odcieniami koloru $f(v_i)$, to musiały one zostać pokolorowane przez Placka, gdyż Jacek zawsze koloruje wierzchołek dobrym kolorem, a taki ruch nie niesie zagrożenia dla sąsiadów tego wierzchołka. Pokażemy, że w sąsiedztwie niepokolorowanego wierzchołka v_i może pojawić się co najwyżej t wierzchołków pokolorowanych przez Placka.

Rozważmy sytuację po ruchu Jacka, w której wierzchołek v_i pozostaje niepokolorowany i Placek pokolorował t_1 jego sąsiadów o numerach niższych i t_2 sąsiadów o numerach wyższych. Jeżeli Placek w pewnym ruchu pokolorował sąsiedni z v_i wierzchołek v_j o wyższym numerze ($i < j$), to zgodnie ze strategią Jacek w kolejnym ruchu powinien pokolorować wierzchołek v_h sąsiedni z v_j , posiadający możliwie najniższy numer. Skoro v_i pozostał niepokolorowany, to znaczy, że $h < i < j$, więc v_h jest wstępnym wierzchołkiem v_i . Takich wstępnych wierzchołków v_i pojawiło się dokładnie t_2 . Wstępnymi wierzchołkami v_i są również wszystkie sąsiednie z nim wierzchołki o niższych numerach pokolorowane przez Placka, a jest ich dokładnie t_1 . Zgodnie z definicją col_2 zachodzi nierówność $t_1 + t_2 < t$, zatem po ruchu Jacka dla każdego niepokolorowanego wierzchołka v_i będzie dostępny dobry kolor. Jeżeli ponadto $t_1 + t_2 = t - 1$, to niepokolorowany wierzchołek v_i nazwiemy *krytycznym*. Zauważmy, że wszyscy wstępni każdego wierzchołka krytycznego zostali pokolorowani, co w szczególności oznacza, że dwa wierzchołki krytyczne

nie mogą mieć wspólnego sąsiada o wyższym numerze, gdyż wówczas jeden z nich byłby niepokolorowanym wstępnym drugiego. Załóżmy, że w następnym ruchu Placek pokolorował kolejnego sąsiada wierzchołka v_i o wyższym numerze. Ruch taki niesie zagrożenie tylko w przypadku, gdy v_i był wierzchołkiem krytycznym, gdyż będzie on teraz posiadał t sąsiadów pokolorowanych przez Placka. Ale skoro v_i jest wierzchołkiem krytycznym, to strategia nakazuje Jackowi pokolorowanie go dobrym kolorem, gdyż ma on najniższy numer spośród niepokolorowanych sąsiadów wierzchołka pokolorowanego przez Placka. Jest to zawsze możliwe, gdyż dla wierzchołka v_i Jacek ma do dyspozycji $t + 1$ dobrych kolorów. To, w połączeniu z wcześniejszą obserwacją, że dwa wierzchołki krytyczne nie miały wspólnego sąsiada o wyższym numerze, kończy dowód. \square

Twierdzenie to, w połączeniu z wcześniejszym wynikiem Chena i Shelpa oraz twierdzeniem o czterech kolorach, daje nierówność $\chi_g(P) \leq 3044$ dla dowolnego grafu planarnego P . Kierstead i Trotter ([30]) pokazali znacznie więcej. Po pierwsze znaleźli lepsze oszacowanie na drugą liczbę kolorującą grafów planarnych: $\text{col}_2(P) \leq 10$, co daje $\chi_g(P) \leq 44$. Po drugie pokazali, że $\chi_g(P) \leq 33$ dla dowolnego grafu planarnego P , co było pierwszym znanym górnym ograniczeniem i pozytywną weryfikacją hipotezy Bodlaendera ([14]). W dowodzie tej nierówności użyli oni znacznie bardziej wyrafinowanej strategii opartej na parametrze podobnym do col_2 , ale lepiej dobranym do potrzeb rozgrywki.

2.3 Lepsze kolorowanie

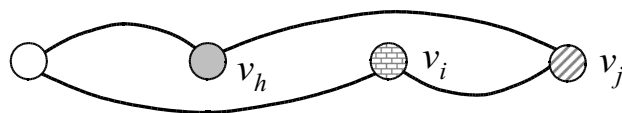
Kolorowanie $f : V(G) \rightarrow \{c_1, \dots, c_k\}$ nazywamy *acyklicznym*, gdy jest ono poprawne (w zwykłym sensie) oraz dodatkowo, gdy każdy podgraf indukowany przez wierzchołki z dowolnych dwóch klas kolorów jest acykliczny lub równoważnie, gdy żaden cykl w grafie nie jest dwukolorowy. Najmniejszą liczbę kolorów potrzebną do acyklicznego pokolorowania wierzchołków grafu G nazywamy *acykliczną liczbą chromatyczną* (ang. acyclic chromatic number) i oznaczamy przez $\chi_a(G)$. Pojęcie to zostało wprowadzone w 1973 przez Grünbauma ([25]), który postawił hipotezę, że $\chi_a(P) \leq 5$ dla dowolnego grafu planarnego P . Udowodnił ją w 1979 Borodin ([15]).

Wiadomo, że $\chi(G) \leq \text{col}(G)$. Analogiczny związek zachodzi między acykliczną liczbą chromatyczną i drugą liczbą kolorującą.

Fakt 2.1. *Dla dowolnego grafu G zachodzi nierówność*

$$\chi_a(G) \leq \text{col}_2(G).$$

Dowód. Ustalmy porządek wierzchołków grafu v_1, \dots, v_n , który realizuje wartość $\text{col}_2(G)$. Kolorujemy wierzchołki zgodnie z tym porządkiem w taki sposób, aby każdy kolejny wierzchołek otrzymał inny kolor niż wszyscy jego wstępnicy. Oczywiście wystarczy do tego $\text{col}_2(G)$ kolorów i kolorowanie to będzie poprawne w zwykłym sensie. Aby pokazać, że na dowolnym cyklu C pojawiają się co najmniej trzy kolory, wystarczy rozpatrzyć kolorowanie wierzchołka $v_j \in C$ o najwyższym numerze oraz dwóch jego sąsiadów $v_h, v_i \in C$. Załóżmy, że $h < i < j$ (patrz rysunek 2.2). Wierzchołki v_h i v_i musiały otrzymać dwa różne kolory, gdyż wierzchołek v_h jest wstępnym wierzchołkiem v_i . Wierzchołek v_j sąsiaduje z każdym z nich więc musiał otrzymać trzeci kolor. \square



Rysunek 2.2: Trzy kolory na cyklu

Dinski i Zhu pokazali ([21]), jak wykorzystać acykliczne kolorowanie wierzchołków do zaplanowania zwycięskiej strategii dla Jacka.

Twierdzenie 2.2 (Dinski, Zhu [21]). *Dla dowolnego grafu G zachodzi nierówność*

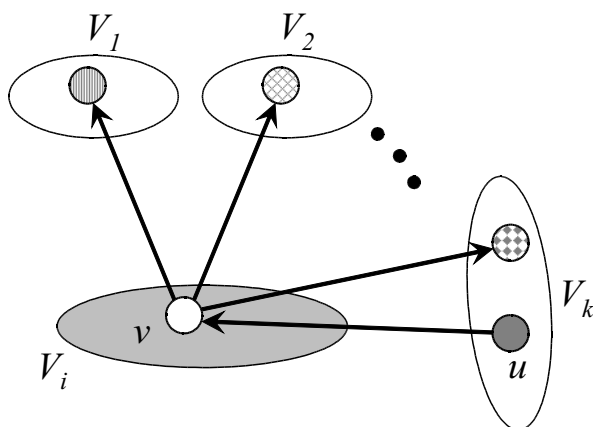
$$\chi_g(G) \leq \chi_a(G)(\chi_a(G) + 1).$$

Dowód. ([9]) Niech $\chi_a(G) = k$. Przed rozgrywką Jacek ustala optymalne acykliczne kolorowanie $f : V(G) \rightarrow \{c_1, \dots, c_k\}$. Niech V_1, \dots, V_k będą klasami wierzchołków w poszczególnych kolorach ($V_i = f^{-1}(\{c_i\})$). W trakcie rozgrywki gracze będą używać kolorów ze zbioru C składającego się z $k + 1$ różnych odcieni każdego z k wyjściowych kolorów c_i , a zatem $|C| = k(k + 1)$ (patrz podrozdział 2.1). Dla $i \neq j$ oznaczmy przez $F_{ij} \subseteq G$ podgraf indukowany przez wierzchołki ze zbioru $V_i \cup V_j$. Zgodnie z definicją acyklicznego kolorowania f każdy podgraf F_{ij} jest lasem. Dodatkowo przed rozgrywką Jacek nadaje taką orientację krawędziom każdego lasu F_{ij} , aby stopień wyjścia każdego wierzchołka (liczony w podgrafie F_{ij}) wynosił co najwyżej 1. Ponieważ każda krawędź grafu G należy do dokładnie jednego lasu F_{ij} , to każdy wierzchołek $v \in V_i$ posiada co najwyżej jednego sąsiada wychodzącego w każdej klasie V_j , dla $i \neq j$. Stopień wyjścia dowolnego wierzchołka wynosi więc co najwyżej $k - 1$. Zarówno kolorowanie f jak i orientacja grafu G mogą być znane również Plackowi, ale informacja ta nie przyniesie mu korzyści.

W trakcie rozgrywki wierzchołek $v \in V_i$ nazywać będziemy *niebezpiecznym*, jeżeli jest on niepokolorowany i posiada sąsiada wchodzącego u pokolorowanego

jednym z odcieni koloru c_i (patrz rysunek 2.3). Zwycięska strategia dla Jacka polega na zastosowaniu się do poniższych zasad:

- (i) Jacek w każdym swoim ruchu koloruje pewien wierzchołek dobrym kolorem,
- (ii) jeżeli w grafie istnieje niebezpieczny wierzchołek, to Jacek koloruje go,
- (iii) jeżeli taki wierzchołek nie istnieje, to Jacek koloruje dowolny wierzchołek.



Rysunek 2.3: Niebezpieczny wierzchołek v zostanie pokolorowany przez Jacka w najbliższym ruchu

Pokażemy, że po ruchu Jacka w grafie nie ma niebezpiecznych wierzchołków, zaś po ruchu Placka może pojawić się co najwyżej jeden niebezpieczny wierzchołek. Zauważmy, że pokolorowanie dowolnego wierzchołka dobrym kolorem (a tak postępuje Jacek) nie może spowodować pojawienia się w grafie nowego niebezpiecznego wierzchołka. Zatem niebezpieczny wierzchołek mógł pojawić się tylko po ruchu Placka. Co więcej, Placek w jednym ruchu mógł stworzyć co najwyżej jeden taki wierzchołek. Istotnie, jeżeli Placek pokolorował wierzchołek $u \in V_j$ złym dla niego odcieniem koloru c_i , to (zgodnie z nadaną orientacją) wierzchołek u może być sąsiadem wchodzącym dla co najwyżej jednego wierzchołka $v \in V_i$. Wierzchołki z innych niż V_i klas kolorów nie staną się niebezpieczne. Po takim ruchu Placka strategia nakazuje Jackowi pokolorowanie niebezpiecznego wierzchołka dobrym kolorem, a zatem przestaje on być niebezpieczny.

Wystarczy jeszcze pokazać, że na każdym etapie gry (zarówno po ruchu Jacka jak i Placka), dla dowolnego niepokolorowanego wierzchołka $v \in V_i$ będzie istniał dobry dla niego odcień koloru c_i . Wierzchołek v może mieć po jednym sąsiedzie wychodzącym w każdej z $k - 1$ pozostałych klas kolorów. W najgorszym

razie wszyscy oni mogą być pokolorowani odcieniami koloru c_i , a po ruchu Placka wierzchołek v może mieć dodatkowo co najwyżej jednego sąsiada wchodzącego pokolorowanego tym odcieniem. Ponieważ w grze każdy kolor c_i używany jest w $k + 1$ odcieniach, to jeden z nich będzie dostępny dla wierzchołka v , co kończy dowód. \square

Twierdzenie to w połączeniu ze wspomnianym wynikiem Borodina dało lepsze górne ograniczenie: $\chi_g(P) \leq 30$ dla dowolnego grafu planarnego P .

2.4 Daltonizm może pomóc

Wszystkie strategie dla Jacka opisywane w poprzednich podrozdziałach miały charakter lokalny. Zakładały one bowiem, że Jacek w każdym swoim ruchu będzie starał się pokolorować wierzchołek sąsiedni (bądź wstępny) z wierzchołkiem pokolorowanym uprzednio przez Placka. Wiadomo nie od dziś, że w wielu grach (jak choćby szachy czy go) lepsze efekty przynoszą strategie globalne oparte na analizie sytuacji na całej planszy i pozwalające zaplanować nie tylko najbliższy ruch, ale również kilka następnych. W rozważanej przez nas grze jedna ze strategii tego typu nazywana jest *strategią aktywacji* (ang. activation strategy). Stanowi ona obecnie najlepsze narzędzie do wyznaczania górnych ograniczeń na rozgrywaną liczbę chromatyczną. Zanim podamy jej dokładny opis (podrozdział 2.5) i pokażemy kilka spektakularnych zastosowań (podrozdział 2.6) musimy wprowadzić pewne istotne utrudnienie dla Jacka.

Założmy, że Jacek cierpi na całkowitą ślepotę barw – potocznie nazywaną daltonizmem. Nie rozróżnia on żadnych kolorów, a potrafi tylko stwierdzić, czy dany wierzchołek jest pokolorowany czy nie. Chcąc nadal grać (i wygrać) z Plackiem musi zaproponować mu modyfikację reguł gry. Zatem gracze zamiast używać kolorów z danego zbioru C ustalają tylko liczbę naturalną k . Każdy ruch Jacka będzie teraz polegał na wskazaniu pewnego niepokolorowanego jeszcze wierzchołka bez określenia, jaki kolor ma być mu nadany. Jacek deklaruje, że będzie w taki sposób wybierał wierzchołki, aby w każdym momencie gry (zarówno po jego ruchu jak i przeciwnika) każdy niepokolorowany wierzchołek (także ten aktualnie przez niego wskazany) był incydentny z co najwyżej $k - 1$ wierzchołkami pokolorowanymi. Jeśli uda mu się osiągnąć ten cel, to zostaje zwycięzcą, w przeciwnym razie wygrywa Placek. Najmniejsze k , dla którego Jacek–daltonista ma strategię wygrywającą na grafie G nazywamy *rozgrywaną liczbą kolorującą* (ang. game coloring number) i oznaczamy $\text{col}_g(G)$. Jasne jest, że strategia zwycięska dla Jacka w grze bez różnicowania barw (ang. marking game) może być z powodzeniem zastosowana w

wyjściowej grze przy założeniu, że $|C| = k$, co wyraża się nierównością

$$\chi_g(G) \leq \text{col}_g(G).$$

Parametr $\text{col}_g(G)$ został po raz pierwszy formalnie zdefiniowany przez Zhu ([35]) jako narzędzie do wyznaczania rozgrywanej liczby chromatycznej. Równoważnie możemy go traktować jako rozgrywany odpowiednik zwykłej liczby kolorującej (stąd oznaczenie). Zamiast mówić o kolorowaniu wierzchołków możemy założyć, że gracze zaznaczając je na przemian, ustawiają je kolejno w pewnym porządku. Rezultatem gry będzie uporządkowanie wszystkich wierzchołków v_1, \dots, v_n . Jacek zostaje zwycięzcą, jeśli każdy wierzchołek v_i ma w tym porządku mniej niż k sąsiadów o niższych numerach. Najmniejsze takie k , które zapewni mu zwycięstwo, niezależnie od poczynań Placka, wyznacza wartość $\text{col}_g(G)$.

2.5 Strategia aktywacji

Zgodnie z modyfikacją reguł (z podrozdziału 2.4) Jacek w trakcie rozgrywki będzie tylko wskazywał, który wierzchołek ma zostać pokolorowany, bez określenia koloru, jaki ma mu zostać nadany. Ponieważ strategię aktywacji prezentujemy z myślą o zastosowaniu jej w oryginalnej grze, to będziemy mówić, że Jacek koloruje wierzchołek.

Przed rozgrywką Jacek ustala pewien porządek wierzchołków v_1, \dots, v_n . Przez $N^+(v)$ i $N^-(v)$ oznaczać będziemy odpowiednio zbiory sąsiadów wierzchołka v o numerach niższych (*sąsiedztwo wychodzące*) i wyższych (*sąsiedztwo wchodzące*). Ponadto na każdym wierzchołku Jacek umieszcza specjalny znacznik, który będzie go informował, czy dany wierzchołek jest aktywny. Możemy wyobrazić sobie, że w każdym wierzchołku grafu została umieszczona żarówka, która zapala się w momencie aktywacji. Tylko Jacek może aktywować wierzchołki przez włączanie odpowiednich żarówek. Na początku gry wszystkie wierzchołki są nieaktywne, a wierzchołek, który zostanie raz aktywowany pozostanie aktywny do końca rozgrywki. Informacja zarówno o porządku wierzchołków grafu G , jak i o tym, które z nich są aktywne, jest jawna również dla Placka, jednak nie przyniesie mu ona korzyści. Pomocne przy prezentacji strategii oraz dla łatwiejszego zapamiętania oznaczeń $N^+(v)$ i $N^-(v)$ będzie nadanie takiej orientacji krawędziom grafu, która wynika z ustalonego porządku. Przyjmijmy, że zwrot strzałki na każdej krawędzi odpowiada znakowi $<$ pomiędzy numerami wierzchołków na jej końcach, czyli $v_i \leftarrow v_j$ oznacza, że $i < j$.

W pierwszym swoim ruchu Jacek aktywuje i koloruje wierzchołek v_1 . Po ruchu Placka, polegającym na pokolorowaniu wierzchołka v , Jacek musi wykonać specjalną procedurę (jej kolejne etapy będziemy dalej nazywać skokami), która kończy

się w momencie wybrania wierzchołka do pokolorowania. Na początku Jacek skacze do wierzchołka v i aktywuje go, jeśli był nieaktywny. Jeżeli w zbiorze $N^+(v)$ nie ma niepokolorowanych wierzchołków, to Jacek koloruje (i aktywuje o ile był nieaktywny) niepokolorowany wierzchołek o najniższym numerze. W przeciwnym razie Jacek skacze do niepokolorowanego wierzchołka $u \in N^+(v)$, o najniższym numerze i

- (i) jeżeli u jest aktywny, to koloruje go,
- (ii) jeżeli u jest nieaktywny, to aktywuje go i kontynuuje procedurę szukając niepokolorowanego wierzchołka $w \in N^+(u)$, o najniższym numerze
- (iii) jeżeli w zbiorze $N^+(u)$ nie ma niepokolorowanych wierzchołków, to Jacek koloruje wierzchołek u ,
- (iv) w przeciwnym razie Jacek skacze do wierzchołka w i postępuje zgodnie z punktami (i)-(iv), przyjmując $u := w$.

Zauważmy, że jeżeli Jacek będzie postępował zgodnie z regułami (i)-(iv), to zawsze po skończonej liczbie skoków znajdzie wierzchołek u , który pokoloruje. Zakończenie procedury aktywacji może nastąpić z dwóch powodów: albo wierzchołek u był aktywny, albo nie miał żadnego niepokolorowanego sąsiada o niższym numerze. Zauważmy ponadto, że po ruchu Jacka wszystkie wierzchołki pokolorowane są aktywne, zaś po ruchu Placka może istnieć co najwyżej jeden pokolorowany wierzchołek, który jest nieaktywny.

Strategia aktywacji (w odróżnieniu od tych z podrozdziałów 2.2 i 2.3) jest dwustopniowa i globalna. Jacek, skacząc do wierzchołka po raz pierwszy, rozważa jego pokolorowanie i aktywuje go zapalając żarówkę, co stanowi sygnał ostrzegawczy. Ponadto uwzględnia on fakt, że natychmiastowe pokolorowanie takiego wierzchołka mogłoby stanowić zagrożenie dla jego niepokolorowanych sąsiadów (o niższych numerach), więc rozważa z kolei pokolorowanie jednego z nich, następnie sąsiadów tego sąsiada i tak dalej, aż przeanalizuje sytuację w całym grafie i dokona optymalnego wyboru. Kolorowanie wierzchołków, które były wcześniej rozważane (aktywowane), ale nie zostały pokolorowane, nastąpi dopiero po tym, jak Jacek wykona do nich drugi skok.

Jasne jest, że kluczową rolę w skuteczności strategii aktywacji odgrywa wstępne uporządkowanie wierzchołków grafu. Z samego opisu strategii trudno od razu wywnioskować, jaki porządek będzie na danej klasie grafów optymalny.

Strategie przypominające strategię aktywacji były stosowane wcześniej na pewnych klasach grafów ([23],[35]), jednak po raz pierwszy została ona formalnie zdefiniowana w 2000 roku przez Kiersteda ([29]). Pokazał on również, jakie

w ogólności warunki musi spełniać porządek, aby wynik rozgrywki był dla Jacka możliwie najlepszy. W kolejnych podrozdziałach pokażemy, jak działa strategia aktywacji na pewnych klasach grafów.

2.6 Drzewa i k -drzewa

Za pierwowzór strategii aktywacji można uznać wynik Faigle'a i innych ([23]) z roku 1993, podający optymalne ograniczenie na rozgrywaną liczbę chromatyczną drzew. W oryginalnym dowodzie nie pojawiło się ani słowo aktywacja ani parametr col_g , a sam opis strategii podany był w nieco innym języku.

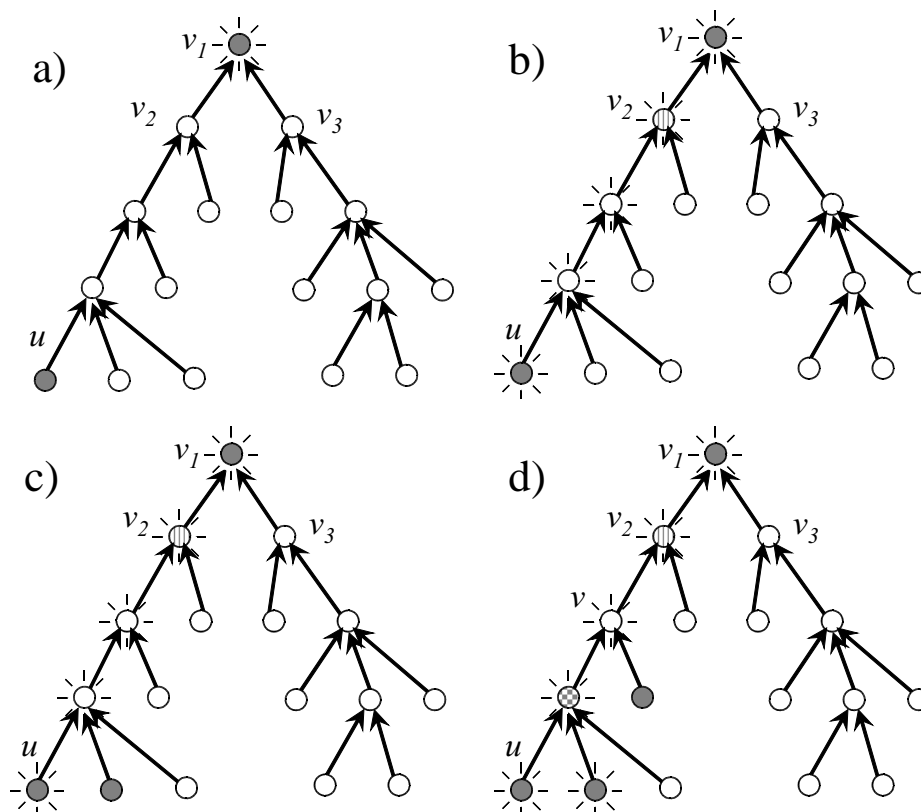
Twierdzenie 2.3 (Faigle, Kern, Kierstead, Trotter [23]). *Dla dowolnego drzewa T zachodzi nierówność*

$$\text{col}_g(T) \leq 4.$$

Dowód. ([9]) Przed grą Jacek ustala porządek v_1, \dots, v_n w taki sposób, aby każdy wierzchołek (z wyjątkiem v_1) miał dokładnie jednego sąsiada o niższym numerze. Można to zawsze zrobić przyjmując za v_1 dowolny wierzchołek (nazywany korzeniem), a pozostałe numerując kolejno, począwszy od tych, które są najbliższe korzenia, a skończywszy na tych najdalszych. Porządek ten generuje orientację o stopniu wyjścia równym jeden. Jacek rozpoczyna grę od wierzchołka v_1 (rysunek 2.4a) i kontynuuje ją zgodnie ze strategią aktywacji według ustalonego porządku. Jeżeli w swoim ruchu Placek pokolorował wierzchołek u , to strategia nakazuje Jackowi aktywować całą skierowaną ścieżkę, zaczynającą się w wierzchołku u , a kończącą się w pewnym aktywnym wierzchołku i pokolorować ostatni niepokolorowany na niej wierzchołek (rysunek 2.4bd).

Wystarczy pokazać, że po ruchu Jacka dowolny niepokolorowany wierzchołek v może mieć co najwyżej dwóch aktywnych sąsiadów. W zbiorze $N^+(v)$ może być co najwyżej jeden aktywny wierzchołek, co wynika z porządku. Ale również w zbiorze $N^-(v)$ może pojawić się co najwyżej jeden aktywny wierzchołek, co wynika z opisu strategii. Załóżmy, że dwa różne wierzchołki $u, w \in N^-(v)$ są aktywne, a wierzchołek v jest niepokolorowany. Jest to niemożliwe, bo zgodnie ze strategią Jacek po aktywowaniu zarówno u jak i v musiał wykonać skok do wierzchołka v , więc nie mógł on pozostać niepokolorowany. Po ruchu Placeka może pojawić się jeden dodatkowy pokolorowany i nieaktywny wierzchołek w zbiorze $N^-(v)$, ale zgodnie ze strategią zostanie on natychmiast aktywowany, a następnie Jacek wykona skok do aktywnego już wierzchołka v , który zostanie pokolorowany (rysunek 2.4d).

Pokazaliśmy więc, że w dowolnym momencie gry, każdy niepokolorowany wierzchołek może mieć co najwyżej trzech pokolorowanych sąsiadów, co implikuje nierówność zawartą w tezie. \square



Rysunek 2.4: Rozgrywka na drzewie

Wniosek 2.1. Dla dowolnego drzewa T zachodzi nierówność

$$\chi_g(T) \leq 4.$$

Sukces strategii aktywacji w grze na drzewach zapewniło takie uporządkowanie wierzchołków, że stopień wyjścia orientacji generowanej przez ten porządek był ograniczony przez jedynkę. Mogłoby to dawać nadzieję, że w przypadku innych porządków, które generują orientację o ograniczonym stopniu wyjścia, strategia aktywacji będzie również skuteczna, co dałoby szansę powiązania parametrów col i col_g . Niestety, również w tym przypadku porządek realizujący liczbę kolorującą ma za słabe własności. Ale już porządek związany z drugą liczbą kolorującą (zdefiniowaną w podrozdziale 2.2) daje dobre efekty i pozwala wzmocnić tezę twierdzenia 2.1.

Twierdzenie 2.4 ([9]). *Dla dowolnego grafu G zachodzi nierówność*

$$\text{col}_g(G) \leq 3\text{col}_2(G) - 1.$$

Dowód. Niech $\text{col}_2(G) = t$. Przed rozgrywką Jacek ustala porządek wierzchołków v_1, \dots, v_n , który realizuje równość $\text{col}_2(G) = t$ i według niego prowadzi grę zgodnie ze strategią aktywacji.

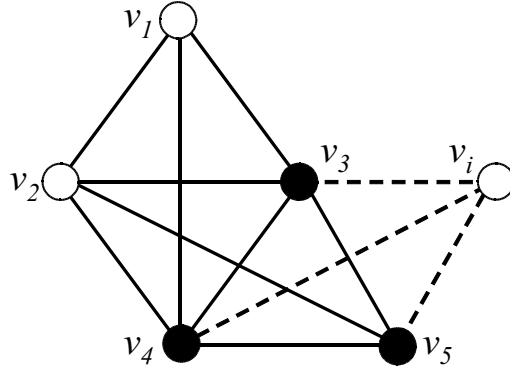
Pokażemy, że po ruchu Jacka, dowolny niepokolorowany wierzchołek v_i może mieć co najwyżej $3t - 3$ aktywnych sąsiadów. W zbiorze $N^+(v_i)$ może ich być co najwyżej $t - 1$, co wynika wprost definicji $\text{col}_2(G)$. Jeżeli w trakcie rozgrywki pojawił się aktywny wierzchołek $v_j \in N^-(v_i)$, to zgodnie ze strategią Jacek musiał wykonać z niego skok do wierzchołka $v_h \in N^+(v_j)$ o najniższym numerze. Jeżeli tylko $v_h \neq v_i$, to oznacza, że $h < i < j$, a więc v_h jest wstępnym wierzchołkiem v_i . Liczba wstępnych jest, zgodnie z definicją $\text{col}_2(G)$, ograniczona przez $t - 1$. Do każdego wstępnego wierzchołka v_i Jacek mógł skoczyć co najwyżej dwa razy, za pierwszym razem aktywując go, a za drugim kolorując. Zatem liczba aktywnych wierzchołków w zbiorze $N^-(v_i)$ nie może przekroczyć $2t - 2$. Co więcej, jeżeli zachodzi najgorszy przypadek i jest ich dokładnie $2t - 2$, to oznacza, że wszyscy wstępni wierzchołki v_i (w tym wszyscy jego sąsiedzi ze zbioru $N^+(v_i)$) są pokolorowani, a wierzchołek pozostał nieaktywny. Daje to nam co najwyżej $3t - 3$ aktywnych sąsiadów dla niepokolorowanego i nieaktywnego wierzchołka v_i . Po ruchu Jacka może pojawić się jeden dodatkowy pokolorowany i nieaktywny wierzchołek w zbiorze $N^-(v_i)$. Zgodnie ze strategią zostanie on natychmiast aktywowany, a następnie Jacek wykona skok do wierzchołka v_i , z którego nie można już wykonać dalszego skoku (bo wszystkie wierzchołki ze zbioru $N^+(v_i)$ są już pokolorowane), zatem zostanie on aktywowany i pokolorowany. Przypadek, gdy v_i został aktywowany wcześniej, jest dla Jacka jeszcze korzystniejszy.

Pokazaliśmy więc, że w dowolnym momencie gry, każdy niepokolorowany wierzchołek może mieć co najwyżej $3t - 2$ pokolorowanych sąsiadów, co implikuje nierówność zawartą w tezie. \square

Istnieje ciekawa klasa grafów, dla której ograniczenie z twierdzenia 2.4 jest optymalne. *k-Drzewem* nazywamy każdy graf T_k , który możemy otrzymać w skończonej liczbie kroków następującej konstrukcji: w pierwszym kroku bierzemy k wierzchołków v_1, \dots, v_k tworzących klikę; w każdym kolejnym kroku dodajemy do skonstruowanego wcześniej grafu nowy wierzchołek i łączymy go z k wierzchołkami tworzącymi klikę K_k (patrz rysunek 2.5).

Fakt 2.2. *Dla dowolnego k -drzewa $T_k \neq K_k$ zachodzi równość*

$$\text{col}_2(T_k) = k + 1.$$



Rysunek 2.5: Konstrukcja 3-drzewa

Dowód. Niech $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ będzie porządkiem wynikającym z konstrukcji grafu T_k . Zauważmy, że w każdym takim grafie wierzchołki v_1, \dots, v_{k+1} tworzą klikę, zatem $\text{col}_2(T_k) \geq k + 1$. Łatwo też zauważyć, że porządek wierzchołków, który wynika z konstrukcji k -drzewa, realizuje równość $\text{col}_2(T_k) = k + 1$. Istotnie, dla $i > k$ każdy wierzchołek v_i posiada dokładnie k sąsiadów (tworzących klikę) o niższych numerach i są to wszyscy jego wstępnicy. Gdyby dodatkowy wierzchołek v_h był wstępnym wierzchołkiem v_i , oznaczałoby to, że v_h i v_i mają takiego wspólnego sąsiada v_j , że $h < i < j$. Jest to sprzeczne z krokiem konstrukcji, w którym do grafu dodany został wierzchołek v_j , bo wierzchołki v_h i v_i nie są sąsiednie, więc nie mogły należeć do tej samej kliky. \square

Wniosek 2.2. Dla dowolnego k -drzewa T_k zachodzi nierówność

$$\chi_g(T_k) \leq \text{col}_g(T_k) \leq 3k + 2.$$

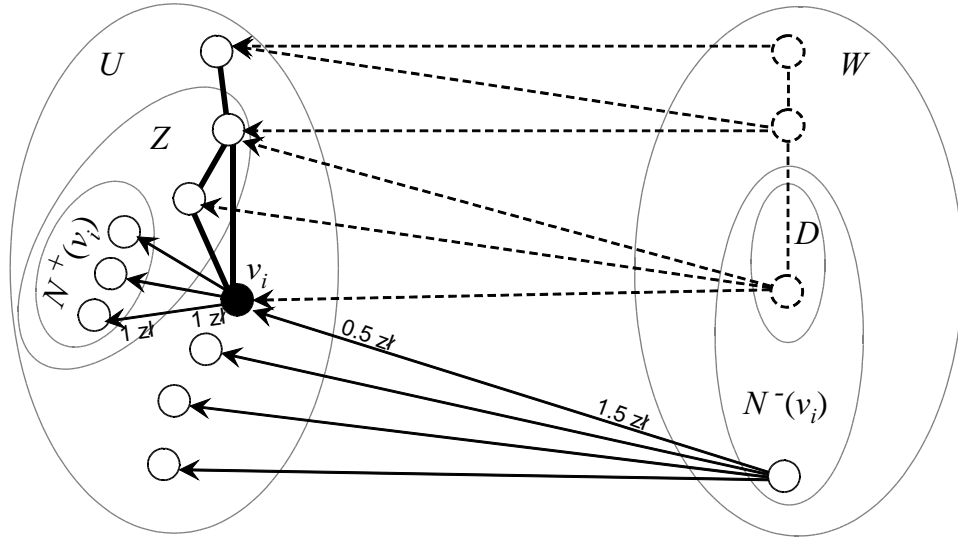
Ponadto, Wu i Zhu pokazali ([34]), że dla każdego $k > 1$ można skonstruować takie k -drzewo T_k , że $\text{col}_g(T_k) = 3k + 2$.

2.7 Porządek za sześć złotych

Z twierdzenia 2.4 wynika, że $\chi_g(P) \leq 29$ dla dowolnego grafu planarnego P . Okazuje się jednak, że porządek, realizujący równość $\text{col}_2(P) = 10$ dla grafów planarnych, nie jest optymalny dla strategii aktywacji. W tym podrozdziale pokażemy, że $\chi_g(P) \leq 18$ dla dowolnego grafu planarnego P .

Niech $P(V, E)$ będzie grafem planarnym. Zaczniemy od zdefiniowania porządku v_1, \dots, v_n na zbiorze wierzchołków, który będzie później wykorzystany przez Jacka w rozgrywce według strategii aktywacji. Będziemy wybierać z grafu P wierzchołki i ustawiać je w odwrotnej kolejności, czyli od v_n do v_1 . Zaczynamy od wierzchołka

v_n o stopniu nie większym niż 5. Dalsza procedura będzie zdefiniowana rekurencyjnie. Załóżmy, że wybraliśmy już wierzchołki $v_n > v_{n-1} > \dots > v_{i+1}$ i szukamy wierzchołka v_i . Podzielmy zbiór $V(P)$ na dwa podzbiory. Niech $W = \{v_n, \dots, v_{i+1}\}$ będzie zbiorem wierzchołków wybranych, zaś $U = V \setminus W$ zbiorem wierzchołków niewybranych. Konstruujemy nowy, pomocniczy graf H w następujący sposób (rysunek 2.6):



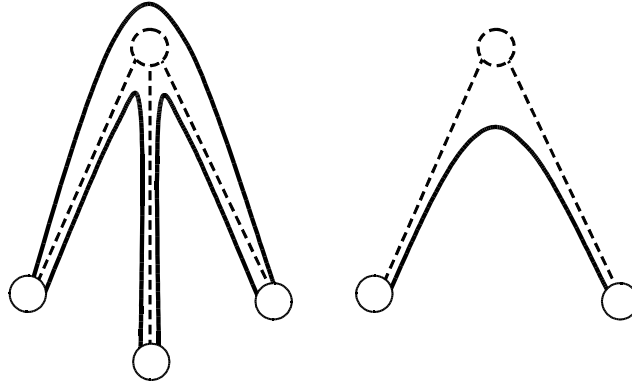
Rysunek 2.6: Wybór wierzchołka v_i

- (i) usuwamy z grafu P wszystkie krawędzie pomiędzy wierzchołkami ze zbioru W ,
- (ii) usuwamy z grafu P każdy wierzchołek $w \in W$, który ma nie więcej niż trzech sąsiadów w zbiorze U ,
- (iii) dla każdego usuniętego wierzchołka $w \in W$ dodajemy wszystkie możliwe krawędzie pomiędzy jego sąsiadami w zbiorze U tak, aby utworzyli klikę.

Zauważmy, że w zbiorze U wszystkie wierzchołki zostały zachowane. Łatwo sprawdzić (patrz rysunek 2.7), że graf H jest również grafem planarnym, więc spełnia wynikającą ze wzoru Eulera nierówność $|E(H)| \leq 3|V(H)| - 6$.

Kładziemy na każdej krawędzi $e \in E(H)$ kwotę dwóch złotych, w czterech monetach po 0.50 zł. Następnie wszystkie monety przesuwamy, z krawędzi na incydentne z nimi wierzchołki, według następujących reguł:

- (i) jeżeli krawędź e łączy dwa wierzchołki ze zbioru U , to każdy z nich otrzymuje po 1 zł,



Rysunek 2.7: Graf H jest planarny

- (ii) jeżeli krawędź e łączy dwa wierzchołki $u \in U$ i $w \in W$, to wierzchołek u otrzymuje 0.50 zł, a wierzchołek w otrzymuje 1.50 zł.

Łączna kwota pieniędzy znajdująca się na wierzchołkach wynosi $2|E(H)|$ zł. Ze wzoru Eulera mamy ostrą nierówność $2|E(H)| < 6|V(H)|$, więc w grafie H musi istnieć wierzchołek v , który otrzymał mniej niż 6 zł. Zauważmy, że $v \notin W$, gdyż zgodnie z regułami dystrybucji i konstrukcji grafu H , każdy pozostały w zbiorze W wierzchołek otrzymał co najmniej 4×1.50 zł. Wierzchołek v był wierzchołkiem niewybrany wyjściowego grafu P , więc wybieramy go, kładąc $v_i = v$.

Twierdzenie 2.5 (Kierstead [29]). *Dla dowolnego grafu planarnego P zachodzi nierówność*

$$\text{col}_g(P) \leq 18.$$

Dowód. ([9]) Przed grą Jacek ustala opisany wyżej „sześciolotowy” porządek wierzchołków v_1, \dots, v_n i według niego prowadzi grę zgodnie ze strategią aktywacji. Pokażemy, że po ruchu Jacka, dowolny niepokolorowany wierzchołek v_i może mieć co najwyżej 16 aktywnych sąsiadów. Niech H będzie grafem skonstruowanym przed wybraniem wierzchołka v_i , zaś W i U odpowiednimi zbiorami (opisanymi w procedurze tworzenia porządku). Oznaczmy przez D zbiór tych sąsiadów wierzchołka v_i w grafie P , które zostały usunięte w trakcie tworzenia grafu H . Ponadto przez Z oznaczmy zbiór sąsiadów wierzchołka v_i ze zbioru U w grafie H (patrz rysunek 2.6). Zgodnie z tymi oznaczeniami zachodzą zawierania

$$D \subseteq N^-(v_i) \subseteq W \quad \text{oraz} \quad N^+(v_i) \subseteq Z \subseteq U.$$

Zauważmy, że zgodnie ze strategią aktywacji i wygenerowanym porządkiem, Jacek po aktywowaniu wierzchołka $v_j \in D$ musiał skoczyć do pewnego wierzchołka $v_h \in$

Z , bądź do samego wierzchołka v_i . W najgorszym przypadku, gdy wierzchołek v_i pozostał nieaktywny, a każdy wierzchołek ze zbioru Z został odwiedzony dwa razy (a więc został pokolorowany), mogło pojawić się $2|Z|$ aktywnych wierzchołków w zbiorze D . Zatem liczba aktywnych sąsiadów nieaktywnego i niepokolorowanego wierzchołka v_i może wynosić co najwyżej

$$|N^+(v_i)| + 2|Z| + |N^-(v_i) \setminus D|,$$

co, z uwagi na zawieranie $N^+(v_i) \subseteq Z$, nie przekracza

$$3|Z| + |N^-(v_i) \setminus D|.$$

Zgodnie z procedurą porządkowania wierzchołek v_i otrzymał mniej niż 6 złotych, co przy przyjętych oznaczeniach wyraża się jako nierówność

$$1.00 \times |Z| + 0.50 \times |N^-(v_i) \setminus D| < 6.$$

Łatwo sprawdzić, że wynika z niej żądana nierówność

$$3|Z| + |N^-(v_i) \setminus D| \leq 16.$$

Po ruchu Placka może pojawić się jeden dodatkowy pokolorowany i nieaktywny wierzchołek v_j w zbiorze D . Zgodnie ze strategią zostanie on natychmiast aktywowany, a następnie Jacek będzie musiał wykonać skok do wierzchołka v_i , bo $N^+(v_j) \subseteq Z \cup \{v_i\}$, a w zbiorze Z wszystkie wierzchołki są już pokolorowane. Z tego samego powodu z wierzchołka v_i nie można wykonać kolejnego skoku, więc zostanie on aktywowany i pokolorowany. Przypadek, gdy v_i został aktywowany wcześniej jest dla Jacka jeszcze korzystniejszy.

Pokazaliśmy więc, że w dowolnym momencie gry, każdy niepokolorowany wierzchołek może mieć co najwyżej 17 pokolorowanych sąsiadów, co implikuje nierówność zawartą w tezie. \square

Wynik z twierdzenia 2.5 został poprawiony przez Zhu ([36]), który pokazał, że $\chi_g(P) \leq \text{col}_g(P) \leq 17$ dla dowolnego grafu planarnego P i jest to obecnie najlepsze znane górne oszacowanie dla obu parametrów. W dowodzie została również użyta strategia aktywacji, lecz nowym pomysłem było zastosowanie dynamicznego porządku wierzchołków, czyli takiego, który ulega zmianie w trakcie trwania rozgrywki. Należy jeszcze dodać, że najlepsze dziś znane dolne oszacowania dla grafów planarnych wynoszą odpowiednio $8 \leq \chi_g(P)$ oraz $11 \leq \text{col}_g(P)$.

Rozdział 3

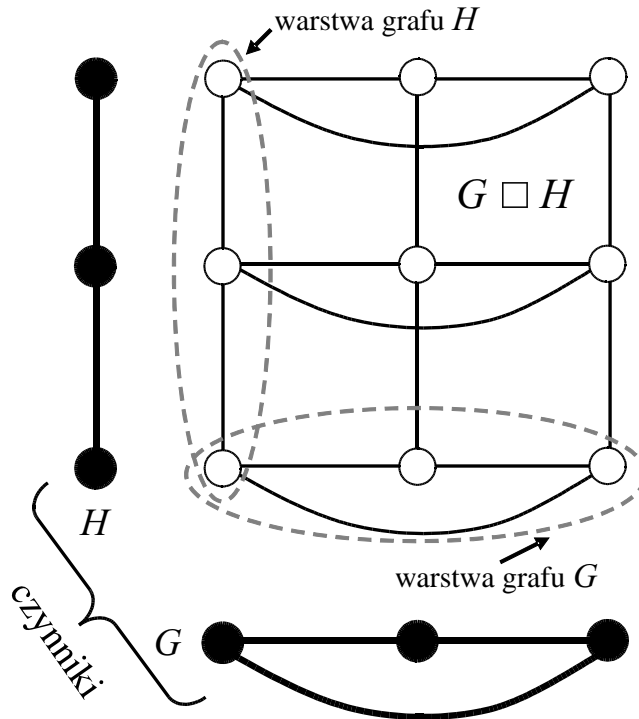
Rozgrywane kolorowanie produktu kartezjańskiego grafów

Produkt dwóch grafów możemy definiować na różne sposoby. Badanie własności produktu kartezjańskiego grafów jest bardzo ciekawym problemem i powstało na ten temat wiele prac naukowych (przegląd ważniejszych wyników można znaleźć w [27]). Jest dużo popularnych gier (na przykład szachy, warcaby, Go), których plansza może być traktowana jako produkt kartezjański dwóch ścieżek. Można więc uznać (z pewnym przymrużeniem oka), że tematyka poruszana w tym rozdziale ma swoje korzenie w życiu codziennym.

Produkt kartezjański (ang. Cartesian product) dwóch grafów G i H (patrz rysunek 3.1) oznaczamy przez $G \square H$ i definiujemy następująco:

- (i) zbiorem wierzchołków grafu $G \square H$ jest $V(G) \times V(H)$,
- (ii) wierzchołki (u_1, v_1) i (u_2, v_2) są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy $u_1 = u_2$ i $v_1 v_2 \in E(H)$ lub $v_1 = v_2$ i $u_1 u_2 \in E(G)$.

Grafy G i H nazywamy *czynnikami* (ang. factor graphs) produktu kartezjańskiego $G \square H$. Dla dowolnego wierzchołka $v \in V(H)$ definiujemy $G_v \subseteq G \square H$ jako podgraf indukowany przez wszystkie wierzchołki ze zbioru $\{(u, v) : u \in V(G)\}$. Podgrafy G_v nazywamy *warstwami* grafu G (ang. G -fiber). Analogicznie definiujemy warstwy grafu H . Łatwo zauważyć, że operator brania produktu kartezjańskiego jest (z dokładnością do izomorfizmu) przemienny i łączny, więc jego definicję można w naturalny sposób rozszerzyć na dowolną skończoną liczbę czynników.



Rysunek 3.1: Produkt kartezjański $C_3 \square P_3$

3.1 Wartości dokładne

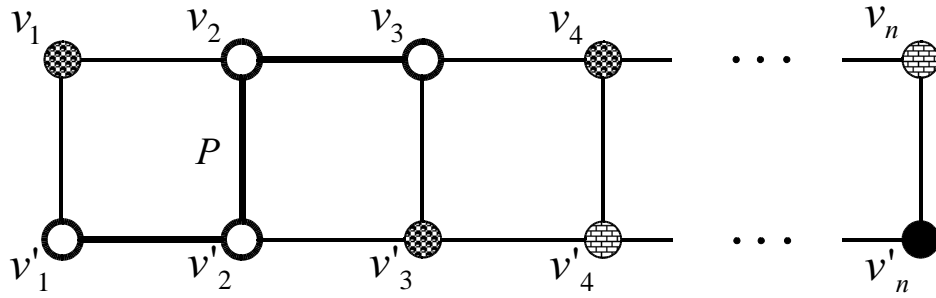
W podrozdziale tym przedstawiamy przykłady rozgrywki na kilku niezbyt skomplikowanych przykładach produktów kartezjańskich.

Twierdzenie 3.1 ([4]). *Jeżeli P_n oznacza ścieżkę na n wierzchołkach, to*

$$\chi_g(K_2 \square P_n) = \begin{cases} 2, & \text{dla } n = 1, \\ 3, & \text{dla } n = 2, 3, \\ 4, & \text{dla } n \geq 4. \end{cases}$$

Dowód. Dla $n = 1$ mamy $K_2 \square P_1 = K_2$, zaś dla $n = 2$ mamy $K_2 \square P_2 = C_4$ i oba te przypadki są trywialne. Dla $n = 3$ produkt kartezjański $K_2 \square P_3$ posiada dokładnie dwa wierzchołki stopnia 3. Jacek, mając do dyspozycji trzy kolory, pokoloruje je w dwóch pierwszych ruchach i wygra grę.

Niech $n \geq 4$. Oznaczmy wierzchołki dwóch warstw ścieżki P_n odpowiednio przez v_1, v_2, \dots, v_n i v'_1, v'_2, \dots, v'_n (patrz rysunek 3.2). Załóżmy, że gracze mają do dyspozycji kolory ze zbioru $\{1, 2, 3\}$. Z uwagi na symetrię, Jacek ma tylko dwie istotnie różne możliwości wykonania pierwszego ruchu. Jeżeli rozpocznie on



Rysunek 3.2: Rozgrywka na produkcie kartezjańskim $K_2 \square P_n$

grę od pokolorowania wierzchołka stopnia 3, powiedzmy v_2 kolorem 1, to Placek odpowiada pokolorowaniem wierzchołka v'_3 kolorem 2. Po następnym ruchu Jacka co najmniej jeden z wierzchołków v_3 lub v'_2 pozostanie niepokolorowany. Jeżeli jest to wierzchołek v_3 , to Placek koloruje v_4 kolorem 3; jeżeli jest to wierzchołek v'_2 , to koloruje on v'_1 kolorem 3 i w obu przypadkach zwycięża.

Jeżeli Jacek rozpocznie grę od pokolorowania wierzchołka stopnia 2, powiedzmy v_1 kolorem 1, to Placek odpowiada pokolorowaniem wierzchołka v'_3 kolorem 1. Dalszą rozgrywkę Placek prowadzi w taki sposób, aby:

- (i) Jacek jako pierwszy musiał pokolorować jeden z wierzchołków ze zbioru $P = \{v'_1, v'_2, v_2, v_3\}$,
- (ii) wierzchołek v_4 był pokolorowany kolorem 1.

Jeżeli spełnione będą oba te warunki to Placek zwycięży (patrz rysunek 3.2). Wierzchołki ze zbioru P indukują ścieżkę P_4 i każdy leżący na niej wierzchołek ma już sąsiada w kolorze 1. Grę na ścieżce musi rozpocząć Jacek mając do dyspozycji jedynie kolory 2 i 3, a to (fakt 1.3) oznacza zwycięstwo Placeka. Zauważmy, że warunek (ii) jest istotny dla powyższego rozumowania. Gdyby bowiem wierzchołek v_4 otrzymał w toku gry inny kolor niż 1, powiedzmy 2, to Jacek kolorując wierzchołek v'_2 kolorem 3 doprowadzi grę na ścieżce P do końca przy użyciu kolorów 2 i 3.

Pozostaje pokazać, że Placek może wymusić spełnienie warunków (i)-(ii). Poza zbiorem P w grafie pozostała parzysta liczba niepokolorowanych wierzchołków, a ruch przypada na Jacka, więc spełniony będzie warunek (i). Aby spełnić warunek (ii) Placek planuje pokolorowanie wierzchołka v_4 kolorem 1 w swoim drugim ruchu. Jacek może temu zapobiec na dwa sposoby, ale każdy z nich prowadzi do natychmiastowej przegranej. Jeżeli Jacek pokoloruje wierzchołek v_4 kolorem 2 to Placek koloruje wierzchołek v'_2 kolorem 3 i zwycięża. Jeżeli Jacek pokoloruje wierzchołek v_5 kolorem 1 to Placek koloruje wierzchołek v_3 kolorem 2, aby w kolejnym ruchu

pokolorować kolorem 3 wierzchołek v'_2 lub v'_4 i również zwyciężyć. To w połączeniu z trywialnym oszacowaniem (fakt 1.1) kończy dowód. \square

Twierdzenie 3.2 ([4]). *Jeżeli C_n oznacza cykl na n wierzchołkach, to*

$$\chi_g(K_2 \square C_n) = 4.$$

Dowód. Oznaczmy wierzchołki dwóch warstw cyklu C_n odpowiednio przez v_1, v_2, \dots, v_n i v'_1, v'_2, \dots, v'_n . Załóżmy, że gracze mają do dyspozycji kolory ze zbioru $\{1, 2, 3\}$. Z uwagi na symetrię, Jacek ma tylko jedną możliwość wykonania pierwszego ruchu. Załóżmy, że koloruje on wierzchołek v_2 kolorem 1. Jeżeli $n \geq 5$, to Placek koloruje wierzchołek v'_3 kolorem 2, aby w kolejnym ruchu pokolorować kolorem 3 wierzchołek v'_1 lub v_4 i zwyciężyć grę. Strategia ta nie działa dla $n = 4$, gdyż Jacek może w drugim ruchu pokolorować wierzchołek v_1 kolorem 3. Jednakże $K_2 \square C_4 = K_{4,4} - 4K_2$ i (fakt 1.6) również mamy $\chi_g(K_2 \square C_4) = 4$. Dla $n = 3$ Placek w pierwszym ruchu koloruje wierzchołek v'_3 kolorem 1, co wymusza na Jacku użycie nowego koloru w drugim ruchu i prowadzi do zwycięstwa Placeka. To w połączeniu z trywialnym oszacowaniem (fakt 1.1) kończy dowód. \square

Twierdzenie 3.3 ([4]). *Jeżeli K_n oznacza graf pełny na n wierzchołkach, to*

$$\chi_g(K_2 \square K_n) = n + 1.$$

Dowód. Dla $n = 1, 2$ rezultat jest oczywisty. Załóżmy, że $n \geq 3$ i w grze dostępnych jest n kolorów. W swoich pierwszych $n - 2$ ruchach Placek stosuje następujące reguły:

- (i) jeżeli Jacek pokolorował wierzchołek w jednej z warstw grafu K_n pewnym kolorem, to Placek w najbliższym ruchu koloruje wierzchołek z przeciwnej warstwy grafu K_n tym samym kolorem,
- (ii) jeżeli to możliwe, to Placek koloruje wierzchołek, którego jedyny sąsiad z przeciwnej warstwy grafu K_n został wcześniej pokolorowany.

Zastosowanie reguły (i) powoduje, że Jacek w każdym swoim ruchu musi użyć nowego koloru, zatem po $n - 2$ ruchach każdego z graczy użytych zostanie dokładnie $n - 2$ kolorów. Zastosowanie reguły (ii) powoduje, że po $n - 2$ ruchach każdego z graczy pozostałe cztery niepokolorowane wierzchołki indukują ścieżkę P_4 bądź cykl C_4 . Jacek musi rozpocząć kolorowanie jednego z tych wierzchołków mając do dyspozycji jedynie dwa kolory. W obu przypadkach (ścieżki i cyklu) Placek wygrywa grę (fakty 1.3 i 1.4). To w połączeniu z trywialnymi oszacowaniami: dolnym (fakt 1.2) i górnym (fakt 1.1) kończy dowód. \square

Rezultaty powyższe mogłyby nasunąć przypuszczenie, że $\chi_g(K_2 \square G) = \chi_g(G) + 1$ dla dowolnego grafu G . Nie jest to jednak prawdą ([4]). Badanie dokładnych wartości rozgrywanej liczby chromatycznej nawet dla stosunkowo małych grafów jest dość złożonym problemem. Dodatkową trudnością jest niemonotoniczność tego parametru na branie podgrafów (nawet indukowanych bądź rozpinających). W produkcie kartezjańskim $G \square H$ grafy G i H pojawiają się jako podgrafy indukowane, będące jego warstwami. Nie oznacza to jednak, że znajomość rozgrywanej liczby chromatycznej dla produktu pozwala wnioskować o jej wartościach dla poszczególnych czynników i odwrotnie. Pokażemy to w kolejnym podrozdziale.

3.2 Gra kombinacyjna

Przedstawimy teraz główny wynik tego rozdziału mówiący, że rozgrywana liczba chromatyczna produktu dwóch grafów nie da się w ogólności ograniczyć z góry przez jakąkolwiek funkcję rozgrywanych liczb chromatycznych czynników.

Dla potrzeb dowodu głównego twierdzenia zdefiniujemy pomocniczą grę kombinacyjną (ang. game of combinations), która jest szczególnym przypadkiem dobrze znanej gry Ramseya ([10],[11]). Niech dany będzie zbiór $F = \{1, \dots, n\}$ oraz rodzina \mathcal{F} złożona z niektórych jego $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ -elementowych podzbiorów. Elementy \mathcal{F} nazywać będziemy kombinacjami zabronionymi (ang. forbidden combinations). W grze kombinacyjnej bierze udział dwóch graczy: unikacz (ang. avoider) i wymuszacz (ang. forcer). Gracze wykonują ruchy na przemian, zaczyna unikacz. Każdy ruch w grze polega na wybraniu ze zbioru F jednego elementu, który nie został jeszcze wybrany przez żadnego z graczy. Gra kończy się po n ruchach, a jej wynikiem jest podział zbioru $F = U \cup W$. Zbiór U zawiera $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ elementów wybranych przez unikacza, zaś zbiór W zawiera $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ elementów wybranych przez wymuszacza. Unikacz wygrywa, jeżeli wybrany przez niego zbiór U nie należy do rodziny kombinacji zabronionych ($U \notin \mathcal{F}$). W przeciwnym przypadku ($U \in \mathcal{F}$) wygrywa wymuszacz. Rodzina \mathcal{F} jest ustalona przed grą i znana obu graczom.

Dla tak zdefiniowanej gry i konkretnego zbioru kombinacji zabronionych jeden z graczy ma strategię wygrywającą. W szczególnych przypadkach gra jest trywialna. Jeżeli $\mathcal{F} = \emptyset$, to unikacz wygrywa niezależnie od przyjętej strategii. Dla odmiany, jeżeli $|\mathcal{F}| = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, to zawsze wygrywa wymuszacz.

Rozważmy dwie modyfikacje gry kombinacyjnej. U -grę nazywać będziemy grę kombinacyjną, w której unikacz ma prawo spasować w dowolnym swoim ruchu, zaś W -grę nazywać będziemy grę kombinacyjną, w której takie prawo ma wymuszacz. Przez spasowanie rozumiemy ruch, w którym gracz rezygnuje z przysługującego

mu prawa wybrania elementu ze zbioru F i następny ruch wykonuje przeciwnik. Liczba pasów jest dowolna. Zakładamy ponadto, że U -gra kończy się w chwili, gdy wymuszacz wybrał $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ elementów ze zbioru F , zaś W -gra kończy się w chwili, gdy unikacz wybrał $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ elementów. W momencie zakończenia gry pozostałe niewybrane elementy zbioru F są automatycznie przydzielane do zbioru U (w U -grze) bądź W (w W -grze) i rozstrzygnięcie następuje zgodnie z wcześniejszymi regułami.

W dalszej części użyteczne będą dwa proste spostrzeżenia, które sformułujemy jako lematy.

Lemat 3.4. *Jeżeli unikacz ma zwycięską strategię w grze kombinacyjnej na zbiorze F ze zbiorem kombinacji zabronionych \mathcal{F} , to ma również strategię wygrywającą w W -grze na zbiorze F ze zbiorem kombinacji zabronionych \mathcal{F} .*

Lemat 3.5. *Jeżeli wymuszacz ma zwycięską strategię w grze kombinacyjnej na zbiorze F ze zbiorem kombinacji zabronionych \mathcal{F} , to ma również strategię wygrywającą w U -grze na zbiorze F ze zbiorem kombinacji zabronionych \mathcal{F} .*

Dowód. Gracz (w U -grze wymuszacz, a w W -grze unikacz) prowadzi grę według zwycięskiej strategii. Jeżeli przeciwnik spasował, to gracz może zasymulować jego ruch (kładąc specjalny znacznik na dowolny niewybrany i niezaznaczony element zbioru F) i dalej grać według zwycięskiej strategii. Podobnie czyni, gdy przeciwnik wybierze element, który wcześniej został zaznaczony. Postępowanie takie doprowadzi do wybrania zwycięskiej konfiguracji w grze kombinacyjnej. Konfiguracja ta jest również zwycięska w U -grze lub W -grze, co kończy dowód obu lematów. \square

Wiadomo, że dla dowolnego $k \geq 2$ zachodzi równość $\chi_g(K_{k,k}) = 3$ (fakt 1.5). Gdyby istniała uniwersalna funkcja $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, która ograniczałaby z góry rozgrywaną liczbę chromatyczną dowolnego produktu kartezjańskiego w sposób

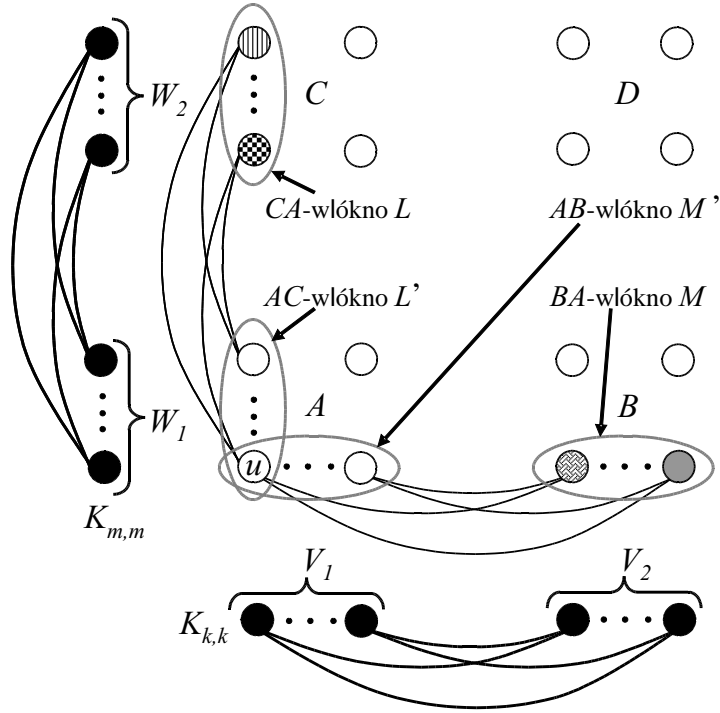
$$\chi_g(G \square H) \leq f(\chi_g(G), \chi_g(H)),$$

to oznaczałoby to, że istnieje taka uniwersalna stała n , że

$$\chi_g(K_{k,k} \square K_{m,m}) \leq n,$$

dla dowolnych k i m . Pokażemy, że taka stała nie istnieje.

Wprowadźmy następujące oznaczenia. Niech $V(K_{k,k}) = V_1 \cup V_2$, gdzie V_i są zbiorami niezależnymi oraz $V(K_{m,m}) = W_1 \cup W_2$, gdzie W_i są zbiorami niezależnymi. Wierzchołki produktu $K_{k,k} \square K_{m,m}$ możemy podzielić na cztery km -elementowe podzbiory postaci $V_i \times W_j$, które oznaczmy przez A, B, C i D . Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że każdy wierzchołek ze zbioru A posiada m sąsiadów w zbiorze C , k sąsiadów w zbiorze B oraz nie posiada sąsiadów w zbiorze D (patrz



Rysunek 3.3: Rozgrywka na produkcie kartezjańskim $K_{k,k} \square K_{m,m}$

rysunek 3.3). Zbiór wszystkich wierzchołków $L \subseteq C$, które mają wspólne sąsiedztwo w zbiorze A nazywać będziemy CA -włóknem (ang. C - A -fiber). Podobnie definiujemy AC -włókno oraz wszystkie XY -włókna, gdzie X i Y są parą różnych elementów ze zbioru $\{A, B, C, D\}$. Zauważmy, że CA -włókno $L \subseteq C$ składa się z m wierzchołków, które posiadają m wspólnych sąsiadów w zbiorze A . Zbiór wszystkich tych sąsiadów $L' \subseteq A$ tworzy AC -włókno, które nazywać będziemy *dopełnieniem* (ang. *complementary*) włókna L . Analogicznie definiujemy dopełnienia pozostałych XY -włókien (patrz rysunek 3.3).

Twierdzenie 3.6 ([4]). *Dla dowolnej liczby naturalnej n istnieją takie liczby naturalne k oraz m , że*

$$\chi_g(K_{k,k} \square K_{m,m}) > n.$$

Dowód. Niech $G = K_{k,k} \square K_{m,m}$ i niech gracze używają kolorów ze zbioru $F = \{1, \dots, n\}$. Załóżmy, że liczby k i m są na tyle duże, że każde włókno grafu G zawiera wystarczającą (dla opisanej niżej strategii) liczbę wierzchołków. Będzie to zawsze możliwe, gdyż (co zobaczymy z opisu strategii) wielkość liczb k i m zależy jedynie od n . Pokażemy strategię dla Placka, która doprowadzi do tego, że w grafie G pojawi się niepokolorowany wierzchołek (w zbiorze A), który będzie posiadał pokolorowanych sąsiadów we wszystkich kolorach ze zbioru F .

Oznaczmy przez $CV(G)$ zbiór wierzchołków pokolorowanych na danym etapie gry. Dla $u \in CV(G)$ niech $c(u)$ oznacza kolor wierzchołka u . Dla $L \subseteq V(G)$ definiujemy $CV(L) = L \cap CV(G)$ oraz $c(L) = \{c(u) : u \in CV(L)\}$. Jeżeli na pewnym etapie gry $c(L) = \emptyset$, to mówimy, że zbiór L jest *wolny*.

Strategię Placka podzielmy na dwa etapy. W pierwszym etapie Placek koloruje wyłącznie wierzchołki ze zbioru C . Ponadto podzielmy pierwszy etap na następujące po sobie *fazy*. Na początku każdej z faz Placek wybiera wolne CA -włókno L , którego dopełnienie L' (będące AC -włóknem) jest również wolne. Każda faza składa się z $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ ruchów Placka ($\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ruchów Jacka), w których koloruje on wyłącznie wierzchołki z ustalonego na początku CA -włókna L . Jedynym ograniczeniem dla Placka są kolory, które Jacek nadał wierzchołkom z włókna L' (ewentualnie ze zbioru D), gdyż nie mogą się już one pojawić na wierzchołkach z włókna L .

Rozważmy początek nowej fazy gry i zdefiniujmy dla niej rodzinę

$$\mathcal{F} = \{c(K) : K \subseteq L, L \text{ jest } CA\text{-włóknem i } |c(K)| = \lceil \frac{n}{2} \rceil\}.$$

Rozważmy W -grę na zbiorze F ze zbiorem kombinacji zabronionych \mathcal{F} , w której Placek jest unikaczem, zaś Jacek wymuszaczem. Jeden z graczy ma w tej grze strategię wygrywającą. Zauważmy, że na początku gry zbiór \mathcal{F} jest pusty, zatem unikacz (Placek) ma strategię wygrywającą. Rozważmy początek takiej fazy gry, że dla zdefiniowanej powyżej W -gry unikacz (Placek) ma strategię wygrywającą. Placek stosuje tę strategię do gry w kolorowanie w ten sposób, że według niej wybiera kolory ze zbioru F i nadaje je niepokolorowanym wierzchołkom CA -włókna L (ustalonego na początku fazy). Ruchy Jacka polegające na kolorowaniu wierzchołków z włókna L' traktuje on jak ruchy wymuszacza w W -grze, bo kolory użyte w nich przez Jacka nie mogą być już użyte przez Placka w dalszej części tej fazy gry. Wszystkie inne ruchy Jacka Placek traktuje jak pasy wymuszacza w W -grze. Ponieważ Placek ma strategię zwycięską w W -grze, to po zakończeniu tej fazy gry kombinacja kolorów wierzchołków z włókna L będzie różna od wszystkich kombinacji ze zbioru \mathcal{F} . Przed przystąpieniem do kolejnej fazy gry Placek musi określić nowy zbiór \mathcal{F} . Łatwo zauważyć, że zbiór ten musi być istotnie większy, gdyż należeć do niego będzie co najmniej jedna dodatkowa kombinacja kolorów – ta uzyskana przez Placka w poprzedniej fazie. Po co najwyżej $\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ fazach pierwszego etapu gry zbiór \mathcal{F} będzie już na tyle duży, że unikacz (Placek) nie będzie mieć już strategii wygrywającej w W -grze. W tym momencie Placek kończy pierwszy (wielofazowy) etap gry i zaczyna drugi, który składać się będzie tylko z jednej fazy.

W drugim etapie Placek koloruje wyłącznie wierzchołki ze zbioru B . Wybiera on wolne BA -włókno M , którego dopełnienie M' (będące AB -włóknem) jest

również wolne. Etap ten składa się z $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ruchów Placka, w których koloruje on wierzchołki z ustalonego na początku BA -włókna M . Jedynym ograniczeniem dla Placka są kolory, które Jacek nadał wierzchołkom z włókna M' (ewentualnie ze zbioru D), gdyż nie mogą się już one pojawić na wierzchołkach z włókna M . Rozważmy U -grę na zbiorze F ze zbiorem kombinacji zabronionych \mathcal{F} , w której Placek jest tym razem wymuszaczem, zaś Jacek unikaczem. Wymuszacz (Placek) ma w tej grze strategię wygrywającą. Placek stosuje tę strategię do gry w kolorowanie w ten sposób, że według niej wybiera kolory ze zbioru F i nadaje je niepokolorowanym wierzchołkom BA -włókna M . Ruchy Jacka polegające na kolorowaniu wierzchołków z włókna M' traktuje on jak ruchy unikacza w U -grze, bo kolory użyte w nich przez Jacka nie mogą być już użyte przez Placka w dalszej części gry. Wszystkie inne ruchy Jacka Placek traktuje jak pasy unikacza w U -grze. Ponieważ Placek ma strategię zwycięską w U -grze, to po jego $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ruchach kombinacja kolorów wierzchołków z włókna M będzie dopełnieniem (do F) jednej z kombinacji zabronionych z \mathcal{F} . Zgodnie z określeniem zbioru \mathcal{F} istnieje takie CA -włókno L , że $c(L) \cup c(M) = F$. Jedyny wierzchołek $u \in A$, który należy do $L' \cap M'$ ma w swoim sąsiedztwie wierzchołki pokolorowane każdym z dostępnych kolorów (co w szczególności oznacza, że jest on niepokolorowany), zatem opisana powyżej strategia powoduje, że Placek wygrywa grę (patrz rysunek 3.3).

Zauważmy, że czas trwania rozgrywki, po którym Placek osiąga zwycięską konfigurację zależy jedynie od liczby kolorów, więc liczby k i m mogą być dowolnie duże. Łatwo zauważyć, że Placek może stosować tę samą strategię, jeśli w grze dostępnych będzie mniej niż n kolorów. Jeżeli Jacek w trakcie rozgrywki kolorować będzie wierzchołki ze zbioru D , to niektóre wierzchołki z CA -włókien i z BA -włókien będą miały ograniczoną możliwość nadawania im kolorów, co mogłoby prowadzić do pewnych komplikacji. Jednak wobec dowolności liczb k i m , Placek zawsze znajdzie w wybranym włóknie dostateczną liczbę niepokolorowanych wierzchołków, których wszyscy sąsiedzi w zbiorze D są również niepokolorowani. To kończy dowód. \square

Pokazaliśmy więc, że rozgrywana liczba chromatyczna produktu kartezjańskiego nie daje się w ogólności ograniczyć przez żadną funkcję rozgrywanych liczb chromatycznych czynników. Możemy to uznać za kolejną anomalię rozgrywanego kolorowania, gdyż w przypadku zwykłej liczby chromatycznej mamy równość

$$\chi(G \square H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}.$$

Analiza małych przypadków z podrozdziału 3.1 oraz wynik z twierdzenia 3.6 uprawnia nas do postawienia hipotezy.

Hipoteza 2. *Dla dowolnych grafów G i H zachodzi nierówność*

$$\chi_g(G \square H) \geq \max\{\chi_g(G), \chi_g(H)\}.$$

3.3 Produkty drzew i grafów planarnych

Naturalnym problemem wydaje się poszukiwanie nietrywialnych (w tym przypadku o nieograniczonym stopniu) klas grafów, których produkty kartezjańskie mają ograniczoną rozgrywaną liczbę chromatyczną. Bardzo przydatne okazuje się tu być twierdzenie 2.2. Przypomnijmy, że kolorowanie $f : V(G) \rightarrow C$ nazywamy *acyklicznym*, gdy jest ono poprawne (w zwykłym sensie) oraz dodatkowo, gdy podgraf indukowany przez wierzchołki z dowolnych dwóch klas kolorów jest acykliczny. Najmniejszą liczbę kolorów potrzebną do acyklicznego pokolorowania grafu G nazywamy *acykliczną liczbą chromatyczną* (ang. acyclic chromatic number) i oznaczamy przez $\chi_a(G)$.

Dinski i Zhu pokazali ([21]), że dla dowolnego grafu G zachodzi nierówność

$$\chi_g(G) \leq \chi_a(G)(\chi_a(G) + 1).$$

Jamison i inni pokazali ([28]), że acykliczna liczba chromatyczna produktu kartezjańskiego dwóch drzew nie przekracza 3. Dostajemy zatem następujące ograniczenie.

Twierdzenie 3.7 ([4]). *Dla dowolnych drzew T_1 i T_2 zachodzi nierówność*

$$\chi_g(T_1 \square T_2) \leq 12.$$

Również dla produktu kartezjańskiego dwóch grafów planarnych rozgrywana liczba chromatyczna jest ograniczona, co wynika z następującej nierówności.

Fakt 3.1. *Dla dowolnych grafów G i H zachodzi nierówność*

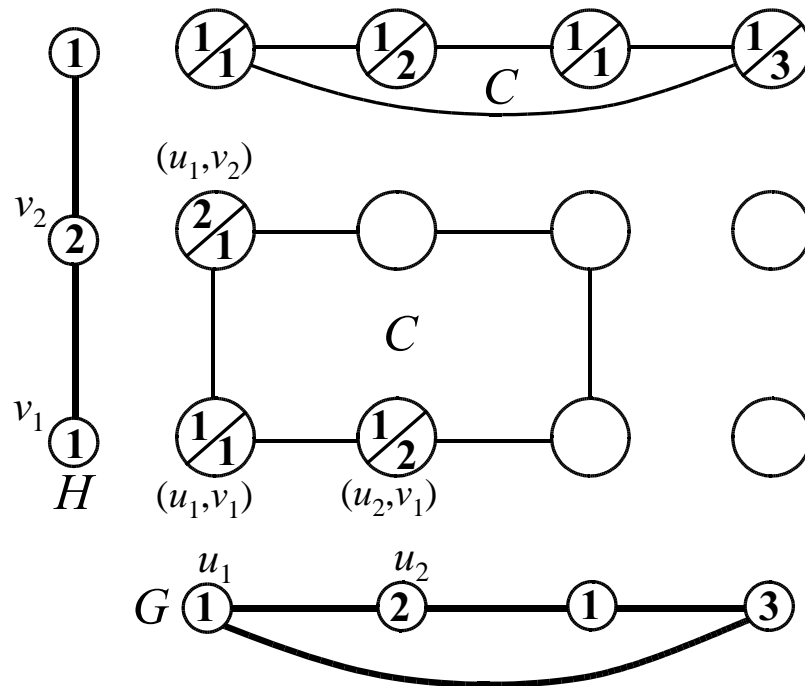
$$\chi_a(G \square H) \leq \chi_a(G)\chi_a(H).$$

Dowód. Niech $\chi_a(G) = k$, $\chi_a(H) = l$ oraz niech $g : V(G) \rightarrow [k]$ i $h : V(H) \rightarrow [l]$ będą optymalnymi acyklicznymi kolorowaniami. Pokażemy, że kolorowanie $f : V(G \square H) \rightarrow [k] \times [l]$ zdefiniowane jako

$$f(u, v) = (g(u), h(v))$$

jest również acykliczne. Jest ono poprawne w zwykłym sensie, bo kolorowania g i h były poprawne. Pokażemy, że na dowolnym cyklu $C \subseteq G \square H$ występują co

najmniej trzy kolory (patrz rysunek 3.4). Jeżeli cały cykl C jest zawarty w jednej warstwie (grafu G bądź H), to z uwagi na acykliczność kolorowania (odpowiednio g lub h) musi on mieć trzy różne kolory w kolorowaniu f . W przeciwnym wypadku istnieją trzy kolejne wierzchołki $(u_1, v_2), (u_1, v_1), (u_2, v_1) \in C$ takie, że (u_1, v_1) jest sąsiedni zarówno z (u_1, v_2) jak i (u_2, v_1) . Oznacza to, że wierzchołki u_1 i u_2 były sąsiednie w grafie G , a wierzchołki v_1 i v_2 były sąsiednie w grafie H . Z poprawności kolorowań g i h dostajemy, że $g(u_1) \neq g(u_2)$ oraz $h(v_1) \neq h(v_2)$, a to zgodnie z określeniem kolorowania f oznacza, że wierzchołki $(u_1, v_2), (u_1, v_1), (u_2, v_1) \in C$ dostały trzy różne kolory, odpowiednio $(g(u_1), h(v_2)), (g(u_1), h(v_1)), (g(u_2), h(v_1))$. To kończy dowód. \square



Rysunek 3.4: Trzy kolory na cyklu

Fakt ten w połączeniu z twierdzeniem Borodina ([15]), mówiącym, że acykliczna liczba chromatyczna grafu planarnego nie przekracza 5 daje nam następujące ograniczenia.

Twierdzenie 3.8 ([4]). *Dla dowolnych grafów planarnych P_1 i P_2 zachodzi nierówność*

$$\chi_g(P_1 \square P_2) \leq 650.$$

Twierdzenie 3.9 ([4]). *Dla dowolnego drzewa T i dowolnego grafu planarnego P zachodzi nierówność*

$$\chi_g(T \square P) \leq 110.$$

Stałe ograniczające w twierdzeniach 3.7, 3.8 i 3.9 nie są optymalne. W celu znalezienia lepszych oszacowań należy poszukać lepszej strategii dla Jacka. Jak pokazaliśmy w rozdziale 2, dobre wyniki w szacowaniu z góry rozgrywanej liczby chromatycznej różnych klas grafów (np. planarnych) dało założenie, że Jacek nie rozróżnia kolorów. Prowadziło to do gry w której Jacek minimalizował liczbę pokolorowanych sąsiadów każdego niepokolorowanego wierzchołka. Dało to kilka nowych strategii, z których najskuteczniejsza okazała się strategia aktywacji.

Ciekawą koncepcję mieszanej strategii zaprezentował Zhu ([37]). Mówiąc w największym uproszczeniu, w rozgrywce na produkcie kartezjańskim $G \square H$ Jacek stosuje jednocześnie dwie strategie. Dla warstw grafu G stosuje on strategię acyklicznego kolorowania, natomiast dla warstw grafu H strategię aktywacji. Daje to oszacowanie które można symbolicznie zapisać w postaci

$$\chi_g(G \square H) \leq f(\chi_a(G), \text{col}_g(H)),$$

gdzie f jest pewną funkcją. W szczególności poprawia ono wyniki z twierdzeń 3.7, 3.8 i 3.9.

Twierdzenie 3.10 (Zhu [37]). *Dla dowolnych drzew T_1 i T_2 oraz dla dowolnych grafów planarnych P_1 i P_2 zachodzą nierówności:*

$$\chi_g(T_1 \square T_2) \leq 10,$$

$$\chi_g(P_1 \square P_2) \leq 105,$$

$$\chi_g(T_1 \square P_1) \leq 36.$$

Z pewnością powyższe stałe również nie są optymalne. Kolejnym naturalnym krokiem w celu ich poprawienia wydaje się zastosowanie globalnej strategii (na przykład aktywacji) i skorzystanie z oszacowania

$$\chi_g(G \square H) \leq \text{col}_g(G \square H).$$

Pokazaliśmy w rozdziale 2, że takie podejście dało świetne rezultaty zarówno dla drzew (optymalne oszacowanie $\chi_g(T) \leq 4$) jak i dla grafów planarnych (najlepsze znane oszacowanie $\chi_g(P) \leq 17$), więc można by mieć nadzieję, że podobnie będzie dla produktu kartezjańskiego. Niestety tak nie jest. Nawet dla produktu kartezjańskiego dwóch gwiazd rozgrywana liczba kolorująca jest nieograniczona.

Twierdzenie 3.11 ([4]). *Dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje taka liczba naturalna k , że*

$$\text{col}_g(K_{1,k} \square K_{1,k}) > n.$$

Dowód. Dowód tego twierdzenia można przeprowadzić wprost, metodami podobnymi do tych użytych w dowodzie twierdzenia 3.6. Podamy tu jednak krótsze uzasadnienie wynikające wprost z twierdzenia Kiersteada i Trottera. Zdefiniujmy graf $sd_1(G)$ (ang. subdivision graph), który powstaje z grafu G przez zastąpienie w nim każdej krawędzi ścieżką długości 2 (lub równoważnie, przez wstawienie dodatkowego wierzchołka na każdej krawędzi). Kierstead i Trotter pokazali ([31]), że $\text{col}_g(sd_1(K_{k,k}))$ rośnie asymptotycznie jak $\ln k$. Graf $K_{1,k} \square K_{1,k} \setminus \{(u_0, v_0)\}$, który otrzymujemy przez usunięcie z grafu $K_{1,k} \square K_{1,k}$ wierzchołka o największym stopniu jest izomorficzny z grafem $sd_1(K_{k,k})$, zatem również $\text{col}_g(K_{1,k} \square K_{1,k})$ rośnie asymptotycznie jak $\ln k$, co implikuje tezę. \square

Rozdział 4

Rozgrywane kolorowanie krawędzi grafów

4.1 Rozgrywany indeks chromatyczny

W rozdziale tym rozważać będziemy krawędziową wersję gry, której reguły są analogiczne do rozpatrywanej wcześniej gry na wierzchołkach. Dwaj gracze - Jacek i Placek na przemian kolorują krawędzie danego grafu G przy użyciu kolorów z ustalonego zbioru C . Obu graczy obowiązuje reguła poprawnego kolorowania, czyli w każdym momencie gry każde dwie incydentne i pokolorowane krawędzie muszą mieć różne kolory. Celem Jacka jest uzyskanie poprawnego kolorowania całego grafu G i tylko w takim przypadku zwycięża. Placek chce temu zapobiec, to znaczy uzyskać takie częściowe pokolorowanie krawędzi grafu, które nie da się rozszerzyć (bez konieczności wprowadzenia dodatkowego koloru) do poprawnego krawędziowo kolorowania całego grafu i wówczas on zostaje zwycięzcą. Dla zadanego zbioru kolorów C i danego grafu G jeden z graczy ma strategię wygrywającą.

Dla tak określonej gry i zadanego grafu G definiujemy *rozgrywany indeks chromatyczny* (ang. game chromatic index) jako najmniejszą liczbę kolorów, dla której Jacek ma strategię zwycięską w krawędziowej grze na grafie G . Parametr ten, oznaczany przez $\chi'_g(G)$, jest dobrze zdefiniowany, gdyż w najgorszym razie dla $|C| = |E(G)|$ dowolna strategia Jacka jest zwycięska. Możemy go również zdefiniować dla dowolnej (skończonej lub nieskończonej) klasy grafów \mathcal{G} jako

$$\chi'_g(\mathcal{G}) = \max\{\chi'_g(G) : G \in \mathcal{G}\},$$

przyjmując, że $\chi'_g(\mathcal{G}) = \infty$, gdy to maksimum nie istnieje.

Fakt 4.1. W grafie G o maksymalnym stopniu wierzchołka równym Δ zachodzą

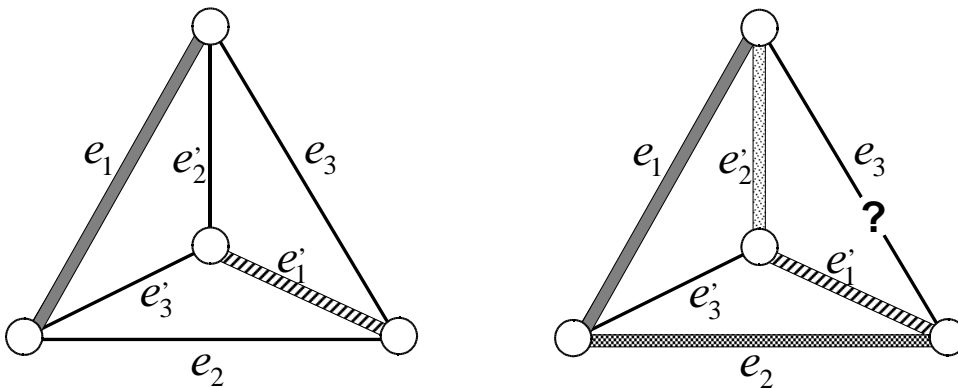
nierówności

$$\chi'(G) \leq \chi'_g(G) \leq 2\Delta - 1.$$

Dowód. Jest oczywiste, że aby istniała strategia wygrywająca dla Jacka w grze na grafie G i ze zbiorem kolorów C , to musi istnieć poprawne kolorowanie krawędzi grafu G przy użyciu kolorów z C , a zatem musi ich być co najmniej tyle, ile wynosi indeks chromatyczny tego grafu.

W przypadku górnego oszacowania wystarczy zauważyć, że w grafie o maksymalnym stopniu wierzchołka Δ każda krawędź jest incydentna z co najwyżej $2\Delta - 2$ krawędziami, więc w grze z dostępnymi $2\Delta - 1$ kolorami Jacek musi wygrać. \square

Zarówno dolne jak i górne oszacowanie może być osiągnięte. Zauważmy, że w rozgrywce na grafie pełnym K_4 przy użyciu kolorów ze zbioru $C = \{1, 2, 3, 4\}$ Placek może wygrać grę (patrz rysunek 4.1). Z uwagi na pełną symetrię możemy założyć, że Jacek rozpoczyna grę od pokolorowania krawędzi e_1 kolorem 1. Placek odpowiada kolorując jedyną nieincydentną z e_1 krawędź e'_1 kolorem 2, co sprawia, że kolory 1 i 2 nie mogą być już użyte w dalszej części gry. Jacek w kolejnym ruchu musi użyć nowego koloru, powiedzmy 3 na krawędzi e_2 . Placek odpowiada kolorem 4 na nieincydentnej z e_2 krawędzi e'_2 , co gwarantuje mu zwycięstwo, gdyż pozostałe dwie niepokolorowane krawędzie e_3 i e'_3 są już incydentne z krawędziami we wszystkich dostępnych kolorach. Mamy zatem $\chi'_g(K_4) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$.

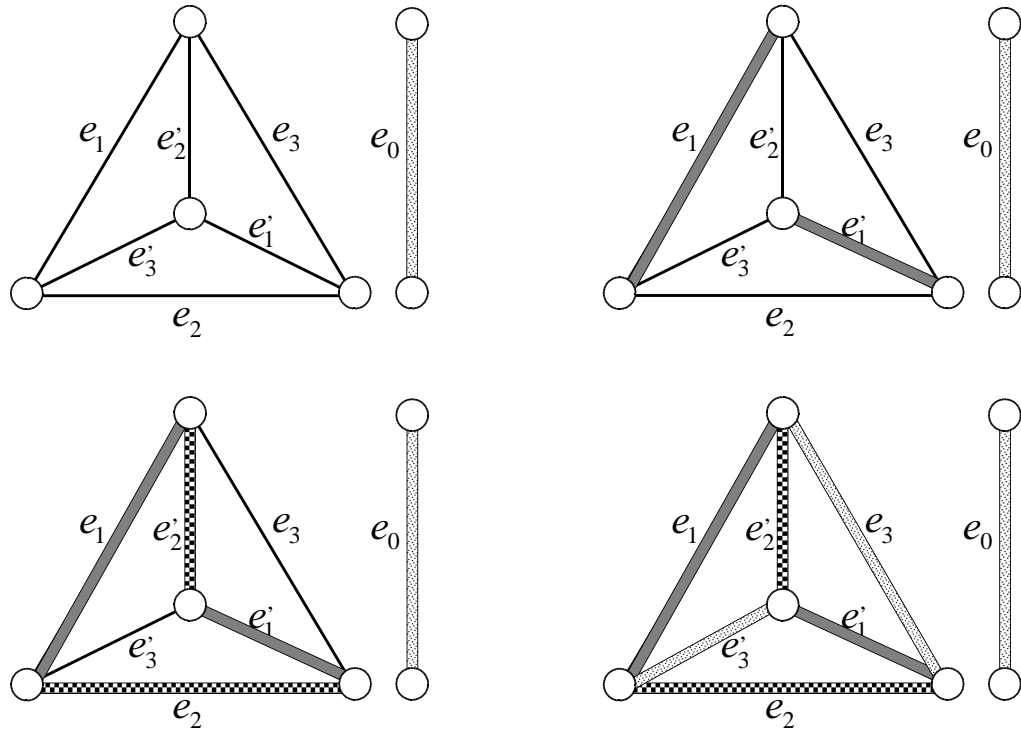


Rysunek 4.1: Rozgrywka na grafie K_4

Z drugiej strony, weźmy graf $K_4 \cup K_2$ będący rozłączną sumą dwóch klik. Zauważmy, że $\chi'(K_4 \cup K_2) = \Delta = 3$ i rozważmy rozgrywkę, w której dostępne są 3 kolory (patrz rysunek 4.2). Jacek w pierwszym ruchu może pokolorować izolowaną krawędź e_0 ze składowej K_2 co spowoduje, że rozgrywkę na składowej K_4 musi rozpocząć Placek. Dzięki temu Jacek ma teraz łatwą strategię wygrywającą. Po każdym ruchu Placeka polegającym na pokolorowaniu krawędzi e_i kolorem i

odpowiada on kolorując jedyną nieincydentną z e_i krawędź e'_i tym samym kolorem, co doprowadzi do poprawnego pokolorowania składowej K_4 trzema kolorami i zwycięstwa Jacka. Mamy zatem $\chi'_g(K_4 \cup K_2) = 3$.

Dwa powyższe przykłady pokazują przy okazji, że rozgrywany indeks chromatyczny, podobnie jak jego odpowiednik wierzchołkowy, nie jest monotoniczny ze względu na branie podgrafów.



Rysunek 4.2: Rozgrywka na grafie $K_4 \cup K_2$

4.2 Aktywacja krawędziowa

Zajmiemy się teraz górnym oszacowaniem rozgrywanego indeksu chromatycznego. Punktem wyjścia niech będzie oszacowanie trywialne zapisane jako $\chi'_g(G) \leq \Delta + \Delta - 1$. Ponieważ w przypadku wygranej Jacka otrzymujemy poprawne pokolorowanie krawędzi, to po prawej stronie każdego takiego oszacowania musi pojawić się parametr Δ . Wskazane byłoby zastąpienie drugiej Δ przez pewną funkcją innego parametru grafowego. Nie powinien on zależeć od maksymalnego stopnia w grafie oraz powinien dać się ograniczyć przez stałą, jeśli nie dla wszystkich grafów, to przynajmniej dla pewnych klas. Szukać będziemy zatem nierówności, które

możemy symbolicznie zapisać w postaci

$$\chi'_g(G) \leq \Delta(G) + f(G).$$

W przypadku zwykłego (nierozgrywanego) indeksu chromatycznego w powyższym wzorze moglibyśmy przyjąć $f \equiv 1$ dla wszystkich grafów (dla niektórych nawet $f \equiv 0$), o czym mówi klasyczne twierdzenie Vizinga.

Pierwsze tego typu oszacowanie dla rozgrywanego indeksu chromatycznego podali Cai i Zhu ([19]).

Twierdzenie 4.1 (Cai, Zhu [19]). *Dla dowolnego d -zdegenerowanego grafu G zachodzi nierówność*

$$\chi'_g(G) \leq \Delta(G) + 3d - 1.$$

Mówimy, że graf G jest d -zdegenerowany (ang. d -degenerate), jeżeli każdy jego podgraf zawiera wierzchołek stopnia co najwyżej d . Aby oszacowanie w powyższym twierdzeniu było możliwie najlepsze należy wziąć najmniejsze d o tej własności, które nazywamy *stopniem zdegenerowania* (ang. degeneracy) grafu i oznaczamy przez $\deg(G)$. Pojęcie stopnia zdegenerowania jest w zasadzie równoważne wprowadzonemu wcześniej pojęciu liczby kolorującej, a jedyna różnica jest taka, że $\deg(G) = \text{col}(G) - 1$. Istnieje wiele klas grafów o nieograniczonym stopniu maksymalnym, ale o ograniczonym stopniu zdegenerowania i dla tych klas twierdzenie to istotnie poprawia wcześniejsze trywialne oszacowanie. Wiemy, że drzewa (lasy) są 1-zdegenerowane, zatem $\chi'_g(T) \leq \Delta(T) + 2$ dla dowolnego acyklicznego grafu T . Wiadomo również, że grafy planarne są 5-zdegenerowane, co daje $\chi'_g(P) \leq \Delta(P) + 14$ dla każdego planarnego grafu P .

W dowodzie twierdzenia 4.1 autorzy wykorzystali zmodyfikowaną strategię aktywacji znaną z gry na wierzchołkach. Opierała się ona na porządku na zbiorze wierzchołków, który wynikał ze zdegenerowania grafu i miał tę własność, że każdy wierzchołek ma co najwyżej d sąsiadów wśród wierzchołków stojących wcześniej w tym porządku. Takie naturalne uporządkowanie grafu d -zdegenerowanego jest zawsze możliwe. Wystarczy kolejno usuwać z grafu wierzchołki o stopniu co najwyżej d i ustawiać je w odwrotnej kolejności. Porządek ten generuje pewne częściowe uporządkowanie zbioru krawędzi, które po zastosowaniu odpowiedniej procedury aktywacyjnej umożliwia Jackowi wybór krawędzi, którą ma pokolorować w swoim ruchu. Podobnie jak w przypadku gry na wierzchołkach, także tym razem Jacek tylko wskazuje krawędź do pokolorowania, nie dbając o kolor, jaki ma być jej nadany. Zwycięstwo w grze zagwarantuje mu wybieranie krawędzi w taki sposób, aby w dowolnym momencie gry, każda niepokolorowana krawędź była incydentna z co najwyżej $\Delta(G) + 3d - 2$ krawędziami pokolorowanymi.

W dalszej części tego rozdziału pokażemy rezultat, w którym poprawiamy oszacowanie z twierdzenia 4.1. W jego dowodzie również wykorzystujemy strategię aktywacji. Nowym pomysłem, który znacznie upraszcza zarówno dowód, jak i opis samej strategii, jest rezygnacja z porządkowania wierzchołków na rzecz odpowiedniej orientacji krawędzi grafu.

Wprowadźmy kilka niezbędnych oznaczeń. Dla danego grafu $G = (V, E)$ przez $\vec{G} = (V, \vec{E})$ oznaczamy graf skierowany (ang. directed graph) powstały z G przez zorientowanie jego krawędzi. Zbiór wszystkich możliwych orientacji grafu G oznaczamy przez $O(G)$. Przez $O_p(G) \subseteq O(G)$ oznaczamy zbiór wszystkich *orientacji porządkowych*. Orientację porządkową zgodną z ustalonym porządkiem wierzchołków v_1, \dots, v_n tworzymy w ten sposób, że zwrot strzałki na każdej krawędzi odpowiada znakowi $<$ pomiędzy numerami wierzchołków na jej końcach, czyli $v_i \leftarrow v_j$ oznacza, że $i < j$. Niech $v \in V$ będzie wierzchołkiem w grafie skierowanym. Przez $E^+(v)$ oznaczamy zbiór krawędzi wychodzących z wierzchołka v , a przez $d^+(v)$ ich liczbę (stopień wyjścia), analogicznie przez $E^-(v)$ oznaczamy zbiór krawędzi wchodzących do wierzchołka v , a przez $d^-(v)$ ich liczbę (stopień wejścia). $\Delta^+(\vec{G})$ oznacza maksymalny stopień wyjścia w grafie skierowanym, zaś

$$\Delta^+(G) = \min_{O(G)} \max_{v \in V} d^+(v).$$

Zauważmy ponadto, że stopień zdegenerowania grafu możemy równoważnie zdefiniować w następujący sposób:

$$\deg(G) = \min_{O_p(G)} \max_{v \in V} d^+(v).$$

Sformułujemy teraz główne twierdzenie tego rozdziału.

Twierdzenie 4.2 ([5]). *Dla dowolnego grafu G zachodzi nierówność*

$$\chi'_g(G) \leq \Delta(G) + 3\Delta^+(G) - 1.$$

Porównując definicje $\Delta^+(G)$ i $\deg(G)$ łatwo zauważamy, że $\Delta^+(G) \leq \deg(G)$, więc wynik z twierdzenia 4.2 jest na pewno nie gorszy od tego z twierdzenia 4.1. Na końcu tego podrozdziału pokażemy, że na pewnych klasach grafów może być on istotnie lepszy.

Dla potrzeb dowodu założmy, że Jacek nie rozróżnia żadnych kolorów, a potrafi tylko stwierdzić, czy dana krawędź jest pokolorowana czy nie. Chcąc nadal grać (i wygrać) z Plackiem musi zaproponować mu modyfikację reguł gry. Gracze, zamiast używać kolorów z danego zbioru C , ustalają przed grą liczbę naturalną k . Każdy ruch Jacka będzie teraz polegał na wskazaniu pewnej niepokolorowanej krawędzi bez określenia, jaki kolor ma być jej nadany. Jacek deklaruje, że będzie w taki

sposób wybierał krawędzie, aby w każdym momencie gry każda niepokolorowana krawędź była incydentana z co najwyżej $k - 1$ krawędziami pokolorowanymi. Jeśli uda mu się osiągnąć ten cel, to zostaje zwycięzcą. W przeciwnym razie wygrywa Placek. Najmniejsze k , dla którego Jacek–daltonista ma strategię wygrywającą na grafie G nazywamy *rozgrywanym indeksem kolorującym* (ang. game coloring index) i oznaczamy przez $\text{col}'_g(G)$. Jasne jest, że strategia zwycięska dla Jacka w grze bez rozróżniania barw (ang. marking game) może być z powodzeniem zastosowana w wyjściowej grze przy założeniu, że $|C| = k$, co wyraża się nierównością

$$\chi'_g(G) \leq \text{col}'_g(G).$$

Teza twierdzenia 4.2 będzie łatwym wnioskiem z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 4.3 ([5]). *Dla dowolnego grafu G zachodzi nierówność*

$$\text{col}'_g(G) \leq \Delta(G) + 3\Delta^+(G) - 1.$$

Dowód. Zaczniemy od opisu strategii dla Jacka. Przed rozgrywką Jacek nadaje taką orientację krawędziom grafu, aby maksymalny stopień wyjścia był możliwie najmniejszy, czyli równy $\Delta^+(G)$. Ponadto na każdej krawędzi umieszcza on specjalny znacznik, który będzie go informował, czy dana krawędź jest aktywna. Możemy wyobrazić sobie, że krawędzie grafu zostały wykonane z długich światełek, które zapalają się w momencie aktywacji. Tylko Jacek może aktywować krawędzie. Na początku gry wszystkie krawędzie są nieaktywne, a krawędź, która zostaje raz aktywowana pozostaje aktywna do końca rozgrywki. Orientacja grafu G oraz wiedza o tym, które krawędzie są aktywne, jest znana Plackowi, ale nie przyniesie mu to żadnej korzyści.

Jacek w celu wybrania krawędzi, którą ma pokolorować wykonuje spacer (jego kolejne etapy będziemy nazywać skokami) po krawędziach grafu stosując następujące reguły:

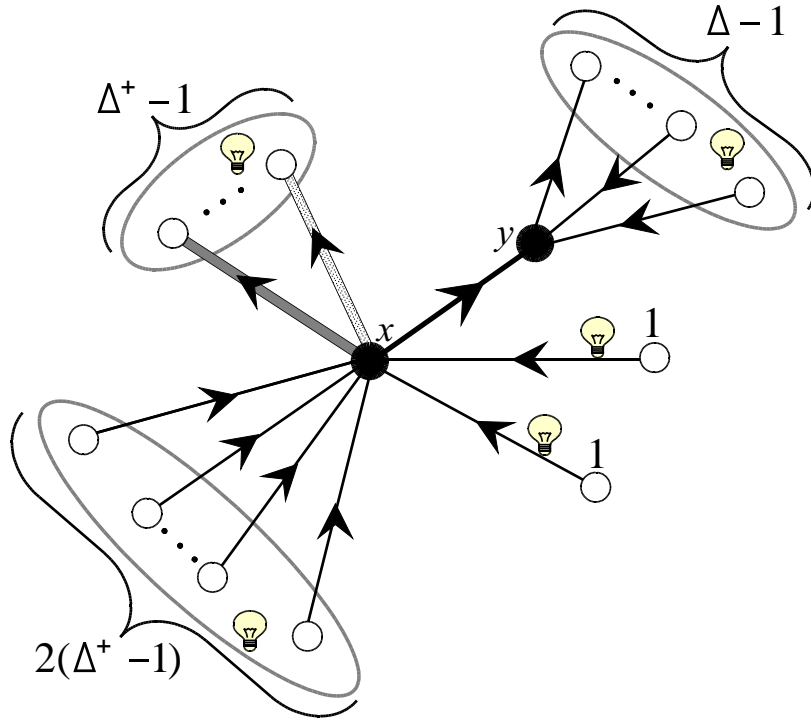
- (i) z krawędzi $\vec{x\bar{y}}$ Jacek skacze do dowolnej niepokolorowanej krawędzi $\vec{y\bar{z}} \in E^+(y)$,
- (ii) jeżeli krawędź $\vec{y\bar{z}}$ jest nieaktywna, to aktywuje ją i kontynuuje zgodnie z (i) przyjmując $\vec{x\bar{y}} := \vec{y\bar{z}}$,
- (iii) jeżeli krawędź $\vec{y\bar{z}}$ jest aktywna, to koloruje ją,
- (iv) jeżeli Jacek skoczył do krawędzi $\vec{x\bar{y}}$, z której nie może wykonać kolejnego skoku (bo nie ma już żadnej niepokolorowanej krawędzi w zbiorze $E^+(y)$), to koloruje $\vec{x\bar{y}}$.

Zauważmy, że jeżeli Jacek rozpocznie spacer od pewnej krawędzi i będzie go kontynuował zgodnie z regułami (i)-(iv), to zawsze zakończy go po skończonej liczbie skoków, kolorując ostatnią odwiedzoną krawędź. Do pełnego opisu strategii należy jeszcze wskazać, od której krawędzi Jacek powinien zacząć spacer. W pierwszym ruchu Jacek skacze do dowolnej krawędzi i kontynuuje spacer zgodnie z regułami (i)-(iv) aż pokoloruje jakąś krawędź. Po ruchu Placka polegającym na pokolorowaniu pewnej krawędzi \vec{xy} Jacek odpowiada następująco:

- (a) jeżeli krawędź \vec{xy} jest aktywna, to Jacek skacze do dowolnej niepokolorowanej krawędzi,
- (b) jeżeli krawędź \vec{xy} jest nieaktywna, to Jacek, w pierwszej kolejności, aktywuje ją, a następnie:
 - jeżeli w zbiorze $E^+(y)$ są jeszcze niepokolorowane krawędzie, to Jacek skacze do jednej z nich,
 - jeżeli w zbiorze $E^+(y)$ nie ma żadnej niepokolorowanej krawędzi, to Jacek skacze do dowolnej niepokolorowanej krawędzi.

Zauważmy, że po ruchu Jacka wszystkie pokolorowane krawędzie są aktywne, natomiast po ruchu Placka może pojawić się co najwyżej jedna pokolorowana krawędź, która jest nieaktywna, jednak możemy ją już w tym momencie zaliczyć do krawędzi aktywnych – zgodnie z punktem (b) powyższej strategii. Zatem dla dowodu poprawności strategii wystarczy ograniczyć z góry liczbę aktywnych krawędzi incydentnych z dowolną niepokolorowaną krawędzią.

Ustalmy dowolną krawędź \vec{xy} i założmy, że po ruchu Jacka jest ona niepokolorowana oraz nieaktywna (patrz rysunek 4.3). Liczbę wszystkich aktywnych krawędzi incydentnych z nią w wierzchołku y możemy ograniczyć przez $\Delta(G) - 1$, zaś liczbę aktywnych krawędzi wychodzących z wierzchołka x (ze zbioru $E^+(x) \setminus \{\vec{xy}\}$) możemy ograniczyć przez $\Delta^+(G) - 1$ i oba te ograniczenia nie zależą od strategii, a jedynie od niezmienników Δ i Δ^+ . Chcąc oszacować z góry liczbę aktywnych krawędzi wchodzących do wierzchołka x (ze zbioru $E^-(x)$) musimy przeanalizować strategię dla Jacka, gdyż tylko on mógł aktywować te krawędzie skacząc do nich w pewnym etapie procedury aktywacji. Zauważmy, że ilekroć Jacek aktywował krawędź ze zbioru $E^-(x)$, tylekroć musiał wykonać z niej skok do którejś niepokolorowanej krawędzi ze zbioru $E^+(x) \setminus \{\vec{xy}\}$. Ponieważ krawędzi w tym zbiorze jest co najwyżej $\Delta^+(G) - 1$, a każda z nich mogła zostać odwiedzona przez Jacka co najwyżej dwukrotnie (za pierwszym razem została aktywowana, za drugim pokolorowana), to krawędzi aktywnych w zbiorze $E^-(x)$ może być co najwyżej $2(\Delta^+(G) - 1)$. Ponadto, jeżeli ograniczenie to jest osiągnięte, to wszystkie (oprócz \vec{xy}) krawędzie wychodzące z wierzchołka x musiały zostać pokolorowane.



Rysunek 4.3: Aktywne krawędzie incydentne z $\vec{x}\vec{y}$

Założmy, że zachodzi graniczny przypadek dla wszystkich powyższych oszacowań, co oznacza, że nieaktywna (więc również niepokolorowana) krawędź $\vec{x}\vec{y}$ jest incydentna z $\Delta(G) + 3\Delta^+(G) - 4$ aktywnymi krawędziami. Kolejny ruch przypada na Placka. Załóżmy, że pokolorował on nieaktywną krawędź ze zbioru $E^-(x)$. Ponieważ jedyną niepokolorowaną krawędzią wychodzącą z x jest $\vec{x}\vec{y}$, to Jacek musi do niej skoczyć i aktywować ją. Jeżeli w zbiorze $E^-(x)$ pojawi się jeszcze jedna aktywna krawędź, to Jacek, zgodnie ze strategią, będzie zmuszony wykonać z niej drugi skok do aktywnej krawędzi $\vec{x}\vec{y}$, więc tym samym zostanie ona pokolorowana.

Wobec dowolności wyboru krawędzi $\vec{x}\vec{y}$ pokazaliśmy, że na dowolnym etapie gry każda niepokolorowana krawędź może być incydentna z co najwyżej $\Delta(G) + 3\Delta^+(G) - 2$ aktywnymi krawędziami, a to w połączeniu z faktem, że tylko aktywne krawędzie mogą być pokolorowane, kończy dowód twierdzenia. \square

Zauważmy, że dowód pozostaje poprawny również, gdy grę zaczyna Placek, dlatego w obu twierdzeniach nie było konieczności zakładania spójności grafu G . Ponadto strategia aktywacji pozostaje skuteczna nawet w przypadku, gdyby Placek w jednym ruchu mógł kolorować dowolną liczbę aktywnych krawędzi oraz jedną krawędź nieaktywną.

Przejdziemy teraz do porównania wyników z twierdzeń 4.1 i 4.2. Z przytoczo-

nych wcześniej definicji wynika, że $\Delta^+(G) \leq \deg(G)$, więc wynik z twierdzenia 4.2 jest nie gorszy od wyniku z twierdzenia 4.1, a dla niektórych grafów może być istotnie lepszy.

Zacznijmy od wprowadzenia jeszcze jednego parametru grafowego powiązane-
go ściśle z poprzednimi. *Lesistością* (ang. arboricity) grafu nazywamy najmniejszą
liczbę lasów, na które można podzielić zbiór wszystkich krawędzi grafu lub równo-
ważnie najmniejszą liczbę drzew (rozpinających), którymi można pokryć wszystkie
jego krawędzie. Lesistość grafu G oznaczamy przez $\text{arb}(G)$. Lesistość jest pewną
miarą lokalnej gęstości grafu i możemy ją wyliczyć w oparciu o znane twierdzenie
Nash-Williamsa mówiące, że

$$\text{arb}(G) = \max_{H \subseteq G} \left\lceil \frac{|E(H)|}{|V(H)| - 1} \right\rceil,$$

gdzie maksimum jest brane po wszystkich podgrafach grafu G .

Lesistość grafu G jest ściśle powiązana z parametrem $\Delta^+(G)$.

Fakt 4.2. *Dla dowolnego grafu G zachodzą nierówności*

$$\text{arb}(G) - 1 \leq \Delta^+(G) \leq \text{arb}(G).$$

Dowód. Krawędzie grafu G możemy podzielić na $\text{arb}(G)$ krawędziowo rozłącz-
nych lasów. Każdy z nich możemy tak zorientować, aby stopień wyjścia każdego
wierzchołka (liczony w obrębie danego lasu) wynosił co najwyżej 1, co da żąda-
ną orientację całego grafu G i górne oszacowanie. Dowód dolnego oszacowania
pominiemy (można go znaleźć w wielu pracach, np. [1]). \square

Fakt 4.3. *Dla dowolnego grafu G zachodzi nierówność*

$$\deg(G) \leq 2\text{arb}(G) - 1.$$

Dowód. Niech $k = \text{arb}(G)$. Średni stopień wierzchołka w grafie acyklicznym jest
mniejszy od 2, co implikuje, że średni stopień wierzchołka w dowolnym podgrafie
 $H \subseteq G$ jest mniejszy od $2k$, więc musi on zawierać wierzchołek stopnia mniejszego
niż $2k$, a zatem graf G jest $(2k - 1)$ -zdegenerowany. \square

Wprawdzie nierówność w powyższym fakcie jest w „złą” stronę, jednak na
niektórych klasach grafów może być osiągnięta równość $\deg(G) = 2\text{arb}(G) - 1$,
co w połączeniu z faktem 4.2 pokazuje, że wynik z twierdzenia 4.2 jest istotnie
lepszy od tego z twierdzenia 4.1.

Wniosek 4.1. *Dla dowolnego grafu planarnego P zachodzi nierówność*

$$\chi'_g(P) \leq \Delta(P) + 8.$$

Dowód. Z twierdzenia Nash-Williamsa oraz z nierówności $|V(H)| \leq 3|E(H)| - 6$ wynika, że $\text{arb}(P) \leq 3$, co gwarantuje istnienie orientacji w grafie P o stopniu wyjścia co najwyżej 3, do której możemy zastosować twierdzenie 4.2. \square

4.3 Problemy otwarte

Głównym problemem związanym z rozgrywanym indeksem chromatycznym jest określenie, jak bardzo może on odbiegać od maksymalnego stopnia grafu, a co za tym idzie od swojego nierozgrywanego odpowiednika. Wyniki pokazane w poprzednim podrozdziale opierały się na strategii, w której Jacek nie dbał o kolory nadawane krawędziom, a jedynie kontrolował liczbę krawędzi pokolorowanych incydentnych z krawędzią niepokolorowaną. Strategia taka jest, niestety, bezużyteczna dla grafów regularnych, gdyż dla nich oszacowanie $\chi'_g(G) \leq \Delta(G) + 3\Delta^+(G) - 1$ jest gorsze od trywialnego. Już dla większych grafów pełnych, czy pełnych dwudzielnych nie znamy żadnych konkretnych strategii, ani wartości $\chi'_g(G)$.

Nawet dla drzew sprawa długo nie była do końca rozstrzygnięta. Twierdzenia 4.1 i 4.2 dają oszacowanie $\chi'_g(T) \leq \text{col}'_g(T) \leq \Delta(T) + 2$ i można pokazać, że wynik ten jest optymalny dla $\text{col}'_g(T)$, dla drzew o $\Delta \geq 3$. Oszacowanie na rozgrywany indeks chromatyczny drzew daje się jednak poprawić. Pokazano ([2], [19] i [22]), że $\chi'_g(T) \leq \Delta(T) + 1$ dla drzew o maksymalnym stopniu $\Delta = 2, 3$ oraz $\Delta \geq 5$ i jest to optymalne ograniczenie. Przypadek drzew o maksymalnym stopniu równym dokładnie 4 najdłużej pozostawał otwarty. Jego rozstrzygnięcie ([33]) wymagało żmudnej analizy pojedynczych przypadków.

Podobnie, jak w przypadku gry na wierzchołkach, nie jest znana odpowiedź na, wyglądające na pierwszy rzut oka niedorzecznie, pytanie. Czy, jeżeli Jacek ma na grafie G zwycięską strategię przy użyciu k kolorów, to będzie również w stanie wygrać na G , jeśli dostępnych będzie $k + 1$ kolorów? Wiadomo tylko, że jeżeli Jackowi wystarczy do zwycięstwa k kolorów, to wystarczy mu również $2k - 1$ (i więcej) kolorów, jednak wynik ten jest tylko prostą konsekwencją trywialnych oszacowań ($\Delta \leq \chi'_g(G) \leq 2\Delta - 1$).

Najbardziej interesującym problemem jest określenie asymptotyki górnego ograniczenia na rozgrywany indeks chromatyczny. Wyniki uzyskane dla drzew i grafów planarnych oraz klasyczne twierdzenie Vizinga nasunęły naturalne przypuszczenie, że być może istnieje taka stała C , że $\chi'_g(G) \leq \Delta(G) + C$ dla dowolnego grafu G . Okazało się ono jednak nieprawdziwe. Beveridge i inni pokazali ([13]), że $\chi'_g(G) \geq 1.008\Delta(G)$ dla wszystkich grafów G o dostatecznie dużym maksymalnym stopniu. Z drugiej strony udowodnili oni również, że $\chi'_g(G) \leq (2 - \varepsilon)\Delta(G)$ dla grafów o wystarczająco dużej gęstości i dla pewnej małej stałej $\varepsilon > 0$. Głównym

problemem jest rozstrzygnięcie, czy analogiczny wynik zachodzi dla wszystkich grafów.

Hipoteza 3 ([13]). *Istnieje taka stała $\varepsilon > 0$, że dla każdego grafu G o maksymalnym stopniu nie większym od Δ zachodzi nierówność*

$$\chi'_g(G) \leq (2 - \varepsilon)\Delta.$$

Rozdział 5

Gra w zalesianie

W poprzednich rozdziałach zajmowaliśmy się rozgrywanym kolorowaniem wierzchołków i krawędzi grafu, podając szereg twierdzeń dotyczących rozgrywanych odpowiedników dwóch klasycznych niezmienników grafowych: liczby chromatycznej i indeksu chromatycznego. Jasne jest, że każdy parametr grafowy, który definiuje się przy pomocy kolorowania spełniającego określone warunki, może być rozpatrywany jako gra, której reguły będą analogiczne do poznanych wcześniej. W tym rozdziale zajmiemy się rozgrywaną wersją krawędziowej lesistości grafu. Zdefiniowaliśmy ją na końcu poprzedniego rozdziału, podając także pewne jej związki z innymi parametrami. Na potrzeby *gry w zalesianie* (ang. game of arboricity) wygodniejsza będzie następująca równoważna definicja: *lesistością* (ang. arboricity) grafu G (oznaczaną przez $\text{arb}(G)$) nazywamy najmniejszą liczbę kolorów potrzebną do takiego pokolorowania wszystkich krawędzi grafu G , aby nie powstał jednokolorowy cykl.

5.1 Rozgrywana lesistość grafów

Dwaj gracze - Jacek i Placek na przemian kolorują krawędzie danego grafu G (zaczyna Jacek) przy użyciu kolorów z ustalonego zbioru C . Oba gracze muszą tak nadawać kolory krawędziom, aby w żadnym momencie gry nie pojawił się cykl, którego wszystkie krawędzie zostały pokolorowane tym samym kolorem. Celem Jacka jest uzyskanie acyklicznego kolorowania całego grafu G i tylko w takim przypadku zwycięża. Placek chce temu zapobiec, to znaczy uzyskać takie częściowe pokolorowanie krawędzi grafu, które nie da się rozszerzyć (bez konieczności wprowadzenia dodatkowego koloru) do acyklicznego kolorowania całego grafu i wówczas on zostaje zwycięzcą. Tak zdefiniowana gra zawsze rozstrzygnie się po skończonej liczbie ruchów (remis jest niemożliwy), a zatem dla zadanego zbioru

kolorów C i grafu G jeden z graczy ma strategię wygrywającą.

Dla tak określonej gry i zadanego grafu G definiujemy *rozgrywaną lesistość* (ang. game arboricity) jako najmniejszą liczbę kolorów, dla której Jacek ma strategię zwycięską na grafie G . Parametr ten, oznaczany przez $\text{arb}_g(G)$, jest dobrze zdefiniowany, gdyż w najgorszym razie dla $|C| = |E(G)|$ dowolna strategia Jaceka jest zwycięska. Możemy go również zdefiniować dla dowolnej (skończonej lub nieskończonej) klasy grafów \mathcal{G} jako

$$\text{arb}_g(\mathcal{G}) = \max\{\text{arb}_g(G) : G \in \mathcal{G}\},$$

przyjmując, że $\text{arb}_g(\mathcal{G}) = \infty$, gdy to maksimum nie istnieje.

Fakt 5.1. *Dla dowolnego grafu G zachodzą nierówności*

$$\text{arb}(G) \leq \text{arb}_g(G) \leq \Delta(G).$$

Dowód. Aby Jacek miał szansę na wygraną, to liczba kolorów dostępnych w grze nie może być mniejsza od najmniejszej możliwej, przy której istnieje acykliczne kolorowanie krawędzi, a którą określa $\text{arb}(G)$. Z drugiej strony, aby uniknąć powstania jednokolorowego cyklu wystarczy nadać krawędzi kolor różny od wszystkich kolorów pojawiających się na jednym z jej końców, a tych może być w najgorszym wypadku $\Delta(G) - 1$. \square

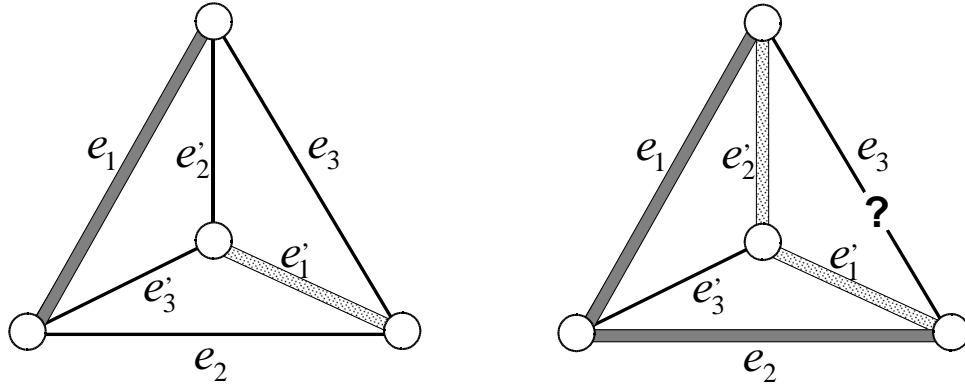
W istocie wystarczy rozpatrywać ten koniec każdej krawędzi, który ma mniejszy stopień, więc górne oszacowanie można nieco poprawić

$$\text{arb}_g(G) \leq \max_{xy \in E(G)} \min\{d(x), d(y)\} \leq \Delta(G).$$

Zacznijmy od dwóch prostych przykładów, pokazujących, że $\text{arb}_g(G)$ może być ostro większa od swojego nierozgrywanego odpowiednika oraz, że, podobnie jak inne rozgrywane parametry, nie jest monotoniczna ze względu na branie podgrafów.

Weźmy graf pełny K_4 oraz zbiór kolorów $C = \{1, 2\}$. Nietrudno pokolorować acyklicznie krawędzie grafu K_4 dwoma kolorami, ale jeśli graf będzie kolorowany podczas rozgrywki, to Placek może ją w łatwy sposób wygrać (patrz rysunek 5.1). Z uwagi na pełną symetrię możemy założyć, że Jacek rozpoczyna grę od pokolorowania krawędzi e_1 kolorem 1. Placek odpowiada na to kolorując jedyną nieincydentną z e_1 krawędź e'_1 używając koloru 2. Jacek w kolejnym ruchu musi pokolorować krawędź łączącą końce pokolorowanych wcześniej krawędzi e_1 i e'_1 jednym z kolorów. Placek koloruje drugim kolorem krawędź łączącą przeciwne końce krawędzi e_1 i e'_1 . Tym sposobem po pierwszych czterech ruchach powstanie cykl

C_4 , którego krawędzie są pokolorowane kolejno 1,1,2,2. Jednej z cięciw tego cyklu nie da się tak pokolorować, aby nie powstał monochromatyczny trójkąt, a zatem Placek zwycięża, co w połączeniu z górnym oszacowaniem z faktu 5.1 pokazuje, że $\text{arb}_g(K_4) = 3$. Z drugiej strony, weźmy graf $K_4 \cup K_2$, będący rozłączną sumą



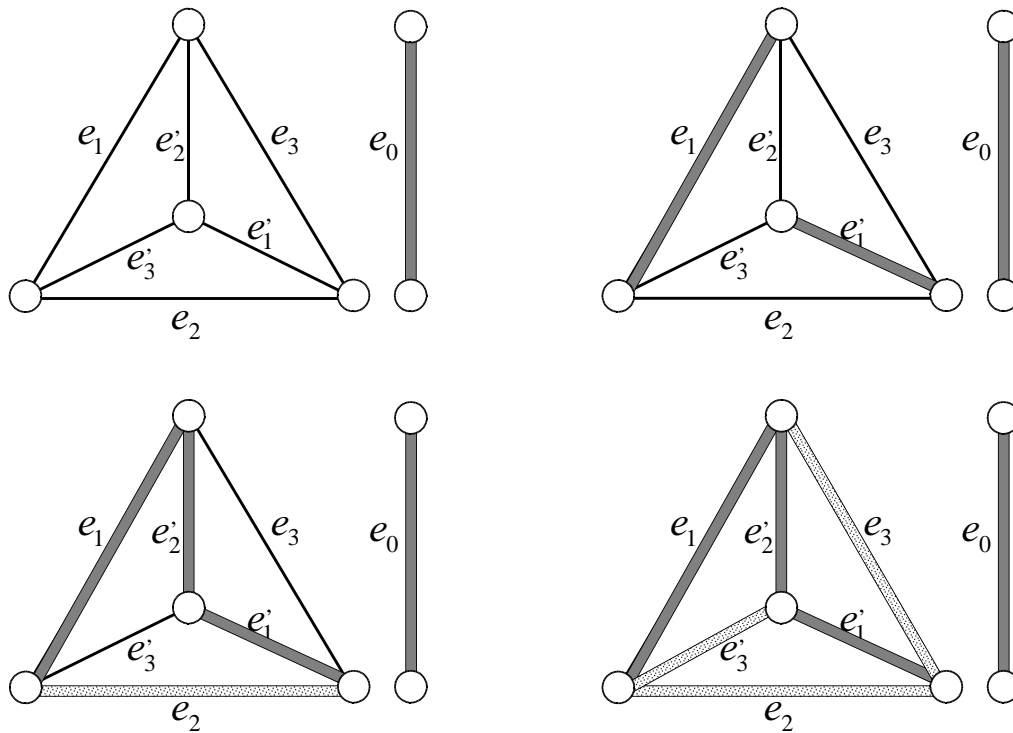
Rysunek 5.1: Rozgrywka na grafie K_4

dwoch klik. Zauważmy, że $\text{arb}(K_4 \cup K_2) = 2$ i rozważmy rozgrywkę, w której dostępne są dwa kolory ze zbioru $C = \{1, 2\}$ (patrz rysunek 5.2). Jacek w pierwszym ruchu może pokolorować izolowaną krawędź e_0 ze składowej K_2 , co spowoduje, że rozgrywkę na składowej K_4 musi rozpocząć Placek. Dzięki temu Jacek ma strategię wygrywającą. Załóżmy, że Placek w swoim pierwszym ruchu pokolorował krawędź e_1 kolorem 1. Jacek odpowiada kolorując jedyną nieincydentną z e_1 krawędź e'_1 tym samym kolorem, co zagwarantuje mu zwycięstwo, gdyż w następnym ruchu użyje on ponownie koloru 1, chyba że wcześniej uczyni to Placek.

Graf złożony z krawędzi $e = xy$, której końce x i y połączone są k krawędziowo rozłącznymi ścieżkami długości co najmniej 2 nazywamy k -tęczą. Zauważmy, że aby Placek miał szanse w grze przy użyciu k kolorów na grafie G , to musi on zawierać jako podgraf przynajmniej jedną k -tęczę. Wygraną w grze zagwarantuje Plackowi pokolorowanie każdej ścieżki z x do y innym kolorem zanim krawędź xy zostanie pokolorowana. W analizowanej wcześniej rozgrywce na grafie K_4 mieliśmy do czynienia z 2-tęczą, którą tworzył cykl C_4 wraz z jedną ze swoich cięciw.

5.2 Grafy 2-zdegenerowane

Pokażemy teraz przykład strategii dla Jacka, której opis jest indukcyjny, to znaczy przenosi się ona z podgrafów na cały graf. Jest to bardzo rzadki przypadek, gdyż, jak już wielokrotnie pokazywaliśmy, parametry rozgrywane nie są monotoniczne ze względu na branie podgrafów. Przypomnijmy, że graf G jest d -



Rysunek 5.2: Rozgrywka na grafie $K_4 \cup K_2$

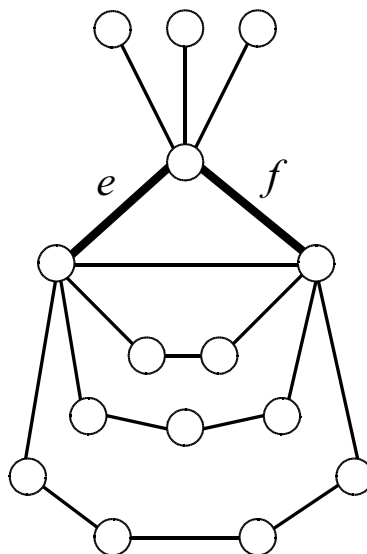
zdegenerowany, jeżeli każdy jego podgraf zawiera wierzchołek stopnia co najwyżej d . Najmniejsze d o tej własności nazywamy *stopniem zdegenerowania* grafu i oznaczamy przez $\text{deg}(G)$. Pojęcie stopnia zdegenerowania jest w zasadzie równoważne wprowadzonemu wcześniej pojęciu liczby kolorującej, a jedyną różnicą jest taka, że $\text{deg}(G) = \text{col}(G) - 1$.

Twierdzenie 5.1 ([8]). *Jeżeli G jest grafem 2-zdegenerowanym to*

$$\text{arb}_g(G) \leq 2.$$

Dowód. Indukcja ze względu na liczbę krawędzi. Teza jest prawdziwa dla wszystkich grafów z jedną bądź dwoma krawędziami. Załóżmy indukcyjnie, że jest prawdziwa dla wszystkich grafów z co najwyżej m krawędziami i niech G będzie grafem 2-zdegenerowanym z $m+1$ krawędziami. Jeżeli G jest lasem, to wynik jest trywialny. Jeżeli G zawiera cykl, to na początku rozgrywki Jacek ustala w grafie G dwie krawędzie e i f o tej własności, że każdy cykl zawierający jedną z nich zawiera również drugą (patrz rysunek 5.3). W grafie 2-zdegenerowanym taka *nierozłączna para* musi istnieć. Wystarczy zauważyć, że maksymalny podgraf G , który nie zawiera wierzchołków stopnia 1, musi (ze względu na 2-zdegenerowanie) zawierać wierzchołek stopnia dokładnie 2 i krawędzie z nim incydentne mają żądaną

własność. Jacek rozpoczyna grę na grafie $G \setminus \{e, f\}$ i kontynuuje ją zgodnie ze



Rysunek 5.3: Nierozłączna para krawędzi e i f

zwycięską dla niego strategią, której istnienie gwarantuje założenie indukcyjne. Jeżeli w pewnym momencie gry Placek pokoloruje jedną z krawędzi e lub f , to Jacek natychmiast koloruje drugą z nich przeciwnym kolorem. Zauważmy, że taki ruch nie może spowodować powstania jednokolorowego cyklu, gdyż każdy cykl w grafie G zawiera obie krawędzi e i f bądź nie zawiera żadnej z nich. Co więcej, taka para ruchów nie stworzy również żadnej niebezpiecznej konfiguracji w całym grafie G , wobec czego Jacek może bez żadnych przeszkód powrócić (po kolejnym ruchu Placeka) do rozgrywki na grafie $G \setminus \{e, f\}$ według zwycięskiej strategii. Jeżeli Placek do samego końca gry nie będzie kolorował żadnej z krawędzi e i f , to będzie to oznaczać, że wszystkie krawędzi w grafie $G \setminus \{e, f\}$ zostały acyklicznie pokolorowane. Pokolorowanie krawędzi e i f dwoma różnymi kolorami nie może stworzyć w grafie G jednokolorowego cyklu. To kończy dowód. \square

Szczególnym przypadkiem grafów 2-zdegenerowanych są grafy zewnętrznie planarne.

Wniosek 5.1. *Jeżeli G jest grafem zewnętrznie planarnym, to $\text{arb}_g(G) \leq 2$.*

5.3 Acykliczność a zalesianie

W podrozdziale tym przedstawimy strategię dla Jacka (analogiczną do tej z twierdzenia 2.2) opartą na acyklicznym kolorowaniu wierzchołków grafu. Przypomnij-

my, że kolorowanie $f : V(G) \rightarrow C$ nazywamy *acyklicznym*, gdy jest ono poprawne (w zwykłym sensie) oraz dodatkowo, gdy podgraf indukowany przez wierzchołki z dowolnych dwóch klas kolorów jest acykliczny. Najmniejszą liczbę kolorów potrzebną do acyklicznego pokolorowania grafu G nazywamy *acykliczną liczbą chromatyczną* (ang. acyclic chromatic number) i oznaczamy przez $\chi_a(G)$.

Dla ustalonego acyklicznego kolorowania $f : V(G) \rightarrow C$ wierzchołków grafu G możemy wyznaczyć *pochodne* od niego kolorowanie $f' : E(\vec{G}) \rightarrow C$ krawędzi grafu skierowanego. Tworzymy je w dwóch krokach. Ponieważ każda para klas kolorów z C indukuje w grafie G podgraf acykliczny, to najpierw krawędzie każdego takiego podgrafu tak orientujemy, aby stopień wyjścia każdego wierzchołka (liczony w podgrafie) był co najwyżej 1. Dostaniemy w ten sposób graf zorientowany \vec{G} (jego orientację nazwiemy *zgodną z f*), którego każdy wierzchołek będzie posiadał w swoim sąsiedztwie wychodzącym po co najwyżej jednym wierzchołku w każdej klasie kolorów. Następnie definiujemy $f'(x\vec{y}) = f(y)$, co oznacza, że każda skierowana krawędź $x\vec{y}$ otrzyma kolor wierzchołka znajdującego się na jej końcu.

Fakt 5.2. *Kolorowanie $f' : E(\vec{G}) \rightarrow C$ pochodne od acyklicznego kolorowania $f : V(G) \rightarrow C$ ma następujące własności:*

- (i) *krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka mają różne kolory,*
- (ii) *krawędzie wchodzące do jednego wierzchołka mają ten sam kolor,*
- (iii) *krawędzie w dowolnym kolorze tworzą las gwiazdny (ang. star forest).*

Dowód. Dwie pierwsze własności wynikają wprost z definicji kolorowania f' . Aby pokazać trzecią własność wystarczy zauważyć, że w kolorowaniu f' nie może pojawić się jednokolorowy trójkąt C_3 ani jednokolorowa ścieżka P_4 . Istotnie, w każdej orientacji krawędzi trójkąta muszą się pojawić dwie krawędzie skierowane zgodnie, ale sytuacja taka jest niemożliwa, gdyż oznaczałoby to, że w pierwotnym kolorowaniu f były dwa wierzchołki jednego koloru połączone krawędzią. Natomiast uniknięcie takiej sytuacji na ścieżce spowoduje, że pojawią się dwie krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka, ale to jest z kolei sprzeczne z własnością (i). \square

Własność (iii) implikuje w szczególności, że $\text{arb}(G) \leq \chi_a(G)$ oraz (w połączeniu z twierdzeniem Borodina [15]) że *lesistość gwiazdna* (ang. star arboricity) grafu planarnego nie przekracza 5.

Twierdzenie 5.2 ([8]). *Dla dowolnego grafu G zachodzi nierówność*

$$\text{arb}_g(G) \leq \chi_a(G)^2.$$

Dowód. Niech $k = \chi_a(G)$. Przed rozpoczęciem rozgrywki Jacek ustala acykliczne kolorowanie $f : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ wierzchołków grafu, a następnie wyznacza zgodną z nim orientację \vec{G} oraz pochodne od niego kolorowanie f' . Zauważmy, że stopień wyjścia wierzchołka w grafie \vec{G} nie przekracza $k - 1$. W trakcie rozgrywki gracze będą używać kolorów ze zbioru

$$S = \bigcup_{i=1}^k S_i,$$

gdzie każdy ze zbiorów S_i składa się z k różnych *odcieni* koloru i . Zakładamy, że zbiory S_i są parami rozłączne, zatem $|S| = k^2$. Mówimy, że kolor s jest *dobry* dla krawędzi $\vec{x}y$, gdy jest on jednym z odcieni koloru $f'(\vec{x}y)$ (czyli gdy $s \in S_{f(y)}$), każdy inny kolor jest *zły* dla tej krawędzi. Skierowaną krawędź $\vec{x}y$ nazywamy *niebezpieczną*, jeżeli jest niepokolorowana i istnieje skierowana krawędź $\vec{z}x$, która została źle pokolorowana jednym z odcieni $f'(\vec{x}y) = f(y)$.

Zwycięska strategia dla Jacka polega na zastosowaniu się do poniższych reguł:

- (i) Jacek w każdym swoim ruchu koloruje pewną krawędź dobrym kolorem,
- (ii) jeżeli w grafie nie ma niebezpiecznej krawędzi, to Jacek koloruje dowolną krawędź,
- (iii) jeżeli po ruchu Placka w grafie pojawi się niebezpieczna krawędź, to Jacek koloruje ją w najbliższym ruchu.

Pokażemy, że

(*) po ruchu Jacka w częściowo pokolorowanym grafie G nie ma niebezpiecznych krawędzi, natomiast po ruchu Placka może pojawić się co najwyżej jedna niebezpieczna krawędź $\vec{x}y$ z dokładnie jedną krawędzią $\vec{z}x$ pokolorowaną jednym z odcieni $f'(\vec{x}y) = f(y)$.

Warunek (*) zagwarantuje Jackowi zwycięstwo w grze, gdyż na każdym jej etapie dowolna niepokolorowana krawędź $\vec{x}y$ będzie incydentna w wierzchołku x z co najwyżej $k - 1$ krawędziami (po ruchu Jacka z $k - 2$ krawędziami wychodzącymi z x , a po ruchu Placka z jedną dodatkową krawędzią wchodzącą do x) pokolorowanymi dobrymi dla niej odcieniami $f(y)$. Zatem dla każdej niepokolorowanej krawędzi będzie istniał dobry kolor różny od wszystkich kolorów krawędzi incydentnych z nią w wierzchołku x , a to, zgodnie z wcześniejszymi obserwacjami, pozwala uniknąć jednokolorowego cyklu.

Zastosujemy indukcję ze względu na liczbę ruchów. Zauważmy, że pokolorowanie dowolnej krawędzi dobrym kolorem nie może spowodować pojawienia się

niebezpiecznej krawędzi, więc w szczególności nie pojawi się ona po pierwszym ruchu Jacka. Ponadto Placek w pierwszym ruchu, kolorując źle pewną krawędź \vec{zx} , może spowodować pojawienie się co najwyżej jednej niebezpiecznej krawędzi \vec{xy} , więc warunek (*) jest spełniony na początku gry.

Zakładamy indukcyjnie, że na pewnym etapie gry warunek (*) jest spełniony i pokażemy, że będzie spełniony również po dowolnym ruchu któregośkolwiek z graczy. Jeżeli kolejny ruch przypada na Jacka i w grafie nie ma niebezpiecznej krawędzi, to Jacek koloruje dowolną krawędź dobrym kolorem. Jeżeli w grafie jest niebezpieczna krawędź \vec{xy} z dokładnie jedną incydentną z nią krawędzią \vec{zx} pokolorowaną jednym z odcieni $f'(\vec{xy}) = f(y)$, to Jacek koloruje niebezpieczną krawędź \vec{xy} dobrym kolorem. Ruch taki jest zawsze możliwy, gdyż krawędź \vec{xy} może być incydentna z co najwyżej $k-2$ krawędziami wychodzącymi z wierzchołka x pokolorowanymi kolorami ze zbioru $S_{f(y)}$, a zgodnie z założeniem indukcyjnym jedyną krawędzią wchodzącą do wierzchołka x i pokolorowaną odcieniem $f(y)$ jest \vec{zx} . Daje to w najgorszym razie łącznie $k-1$ krawędzi w różnych odcieniach $f(y)$, zaś każdy kolor w grze występuje w k odcieniach. Zatem po nadaniu dobrego koloru krawędzi \vec{xy} przestaje ona być niebezpieczna i co więcej żadna inna krawędź nie stanie się niebezpieczna. Jeżeli kolejny ruch przypada na Placka, to zgodnie z założeniem indukcyjnym w grafie nie ma niebezpiecznej krawędzi i nie będzie jej również, gdy Placek pokoloruje dobrze pewną krawędź. Jeżeli Placek pokoloruje złym kolorem pewną krawędź \vec{zx} , to w grafie może pojawić się co najwyżej jedna incydentna z nią krawędź \vec{xy} , która jest niebezpieczna, co wynika natychmiast z własności (i) w fakcie 5.2. Sprawdziliśmy zatem, że warunek (*) będzie spełniony zarówno po ruchu Jacka jak i Placka, a to kończy dowód indukcyjny. \square

Wynik ten pokazuje, jak acykliczne kolorowanie wierzchołków może być wykorzystane do strategii w grze w zalesianie. Podobnie jak w przypadku gry wierzchołkowej znacznie lepsze oszacowania można uzyskać innymi metodami.

5.4 Strategia aktywacji

Zanim pokażemy główny wynik tego podrozdziału, który mówi, że $\text{arb}_g(G) \leq 3 \text{arb}(G)$ wprowadzimy pomocniczą grę w zaznaczanie krawędzi (ang. edge-marking game). Jacek i Placek ustalają liczbę naturalną k i graf skierowany $\vec{G} = (V, \vec{E})$. Gracze na przemian *zaznaczają* krawędzie grafu \vec{G} . Grę rozpoczyna Jacek, a jego celem jest takie zaznaczanie krawędzi, aby na każdym etapie gry (zarówno po ruchu jego jak i Placka) każda niezaznaczona krawędź \vec{xy} była incydentna w swoim początku x z mniej niż k zaznaczonymi krawędziami. Jeśli Jackowi uda się osiągnąć ten cel, to zostaje zwycięzcą. W przeciwnym ra-

zie wygrywa Placek. Oznaczmy najmniejsze k , dla którego Jacek ma zwycięską strategię na grafie \vec{G} przez $\text{col}'_g(\vec{G})$. Parametr ten potraktujemy jedynie pomocniczo. Jest on analogiczny do wprowadzonego w podrozdziale 4.2 rozgrywanego indeksu kolorującego grafu nieskierowanego $\text{col}'_g(G)$. Przypomnijmy, że w definicji col'_g wprowadziliśmy również pomocniczą grę, w której Jacek–daltonista starał się zminimalizować liczbę pokolorowanych (zaznaczonych) krawędzi incydentnych z każdą krawędzią niepokolorowaną (niezaznaczoną). Jedyna różnica między obiema grami jest taka, że tym razem Jacek skupia swą uwagę tylko na początku (ustalonym przez orientację \vec{G}) każdej z krawędzi.

Niech $v \in V$ będzie wierzchołkiem w grafie skierowanym \vec{G} . Przez $E^+(v)$ oznaczamy zbiór krawędzi wychodzących z wierzchołka v , a przez $d^+(v)$ ich liczbę (stopień wyjścia). Analogicznie przez $E^-(v)$ oznaczamy zbiór krawędzi wchodzących do wierzchołka v , a przez $d^-(v)$ ich liczbę (stopień wejścia). $\Delta^+(\vec{G})$ oznacza maksymalny stopień wyjścia w grafie skierowanym \vec{G} , zaś $\Delta^+(G)$ minimalną wartość $\Delta^+(\vec{G})$ wziętą po wszystkich orientacjach grafu G .

Lemat 5.3 ([8]). *Dla dowolnego grafu skierowanego \vec{G} zachodzi nierówność*

$$\text{col}'_g(\vec{G}) \leq 3\Delta^+(\vec{G}).$$

Dowód. Niech $k = \Delta^+(\vec{G})$. Pokażemy strategię dla Jacka, gwarantującą, że w każdym momencie gry, dla każdej niezaznaczonej krawędzi $\vec{x}\vec{y}$ istnieje co najwyżej $3k - 1$ zaznaczonych krawędzi incydentnych z nią w wierzchołku x . Zanim Jacek wybierze krawędź, którą ma zaznaczyć, wykonuje *procedurę aktywacji*, której kolejne etapy będziemy nazywać *skokami*. Przed grą Jacek na każdej krawędzi umieszcza specjalny znacznik, który będzie go informował, czy dana krawędź jest aktywna. Możemy wyobrazić sobie, że krawędzie grafu zostały wykonane z długich świetlówek, które Jacek zapala w momencie aktywacji. Na początku gry wszystkie krawędzie są nieaktywne, a krawędź, która zostanie raz aktywowana pozostanie aktywna do końca rozgrywki. Niech $U \subseteq \vec{E}$ oznacza zbiór krawędzi niezaznaczonych w momencie, gdy ruch przypada na Jacka.

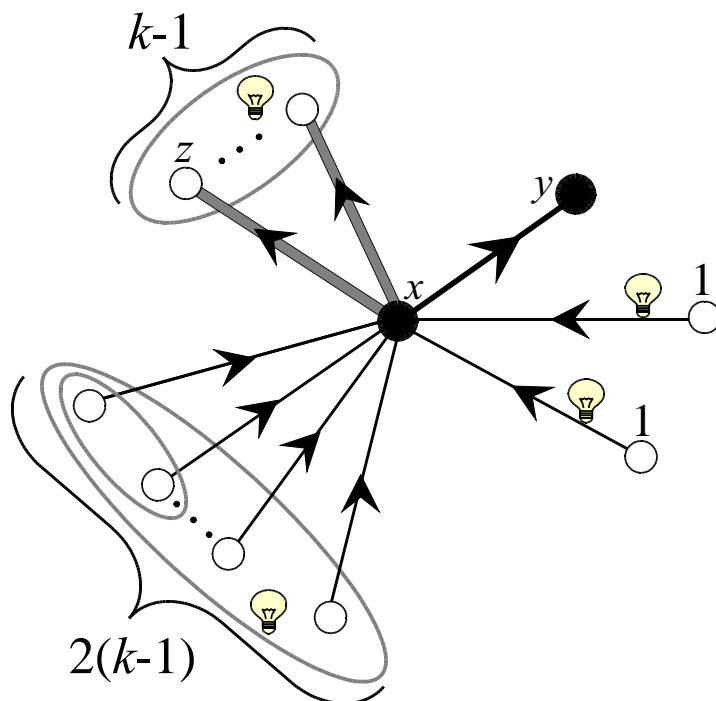
Procedura aktywacji jest analogiczna do tej użytej w dowodzie twierdzenia 4.3 i wygląda następująco:

- (i) z krawędzi $\vec{x}\vec{y}$ Jacek skacze do dowolnej krawędzi $\vec{y}\vec{z} \in U \cap E^+(y)$,
- (ii) jeżeli krawędź $\vec{y}\vec{z}$ jest nieaktywna, to aktywuje ją i kontynuuje zgodnie z (i) przyjmując $\vec{x}\vec{y} := \vec{y}\vec{z}$,
- (iii) jeżeli krawędź $\vec{y}\vec{z}$ jest aktywna, to zaznacza ją,

(iv) jeżeli Jacek skoczył do krawędzi \vec{xy} , z której nie może wykonać kolejnego skoku (bo zbiór $U \cap E^+(y)$ jest pusty), to zaznacza \vec{xy} .

Zauważmy, że procedura ta zawsze zakończy się po skończonej liczbie skoków, zaznaczeniem ostatniej odwiedzonej krawędzi. Do pełnego opisu strategii należy jeszcze wskazać, od której krawędzi Jacek powinien ją rozpocząć. W pierwszym ruchu Jacek rozpoczyna procedurę od dowolnej krawędzi i kontynuuje ją zgodnie z regułami (i)-(iv). Po ruchu Placka polegającym na zaznaczeniu pewnej krawędzi \vec{xy} Jacek odpowiada następująco:

- (a) jeżeli krawędź \vec{xy} jest aktywna, to Jacek skacze do dowolnej krawędzi ze zbioru U ,
- (b) jeżeli krawędź \vec{xy} jest nieaktywna, to Jacek, w pierwszej kolejności, aktywuje ją, a następnie:
 - jeżeli $U \cap E^+(y) \neq \emptyset$, to Jacek skacze do jednej z niezaznaczonych krawędzi ze zbioru $E^+(y)$,
 - jeżeli $U \cap E^+(y) = \emptyset$, to Jacek skacze do dowolnej niezaznaczonej krawędzi.



Rysunek 5.4: Aktywne krawędzie incydentne z \vec{xy}

Zauważmy, że po ruchu Jacka tylko aktywne krawędzie mogą być zaznaczone, natomiast po ruchu Placka może pojawić się co najwyżej jedna nieaktywna krawędź, która jest zaznaczona. Ustalmy dowolną krawędź $\vec{x}\vec{y}$ i zauważmy, że dla dowodu poprawności strategii wystarczy ograniczyć z góry liczbę aktywnych krawędzi w zbiorze $E^+(x) \cup E^-(x) \setminus \{\vec{x}\vec{y}\}$ (patrz rysunek 5.4). Zauważmy, że zgodnie z procedurą aktywacji, do każdej krawędzi Jacek mógł skoczyć co najwyżej dwukrotnie (za pierwszym razem aktywując ją, a za drugim zaznaczając). Dlatego też dla każdej aktywnej i zaznaczonej krawędzi $\vec{x}\vec{z} \in E^+(x)$ istnieją co najwyżej dwie aktywne krawędzie w zbiorze $E^-(x)$, z których Jacek skoczył bezpośrednio do $\vec{x}\vec{z}$. W zbiorze $E^+(x) \setminus \{\vec{x}\vec{y}\}$ jest co najwyżej $k - 1$ krawędzi i jeżeli wszystkie one zostały zaznaczone, to w zbiorze $E^-(x)$ mogło pojawić się co najwyżej $2(k - 1)$ aktywnych krawędzi. Jeżeli w zbiorze $E^-(x)$ pojawi się kolejna aktywna krawędź, to $\vec{x}\vec{y}$ zostanie aktywowana, a po kolejnej aktywnej krawędzi w zbiorze $E^-(x)$ zostanie ona zaznaczona. Dodając wszystkie powyższe wartości dostajemy co najwyżej $(k - 1) + 2(k - 1) + 1 + 1 = 3k - 1$ aktywnych krawędzi wokół wierzchołka x zanim krawędź $\vec{x}\vec{y}$ zostanie zaznaczona, a to, wobec dowolności wyboru krawędzi $\vec{x}\vec{y}$, kończy dowód lematu. \square

Dzięki lematowi 5.3 możemy ograniczyć rozgrywaną lesistość grafu przez pewną funkcję zwykłej lesistości krawędziowej.

Twierdzenie 5.4 ([8]). *Dla dowolnego grafu G zachodzi nierówność*

$$\text{arb}_g(G) \leq 3\text{arb}(G).$$

Dowód. Niech $k = \text{arb}(G)$. Przed rozgrywką Jacek tak orientuje krawędzie grafu G , aby maksymalny stopień wyjścia wynosił co najwyżej k . Jest to możliwe, gdyż każdy las posiada orientację o stopniu wyjścia co najwyżej 1, a lasów jest dokładnie k . Na tak zorientowanym grafie \vec{G} Jacek stosuje strategię aktywacji z lematu 5.3, która przy dostępnych $3k$ kolorach zagwarantuje mu zwycięstwo. Istotnie, na każdym etapie gry dowolna niepokolorowana krawędź $\vec{x}\vec{y}$ jest incydentna w wierzchołku x z co najwyżej $3k - 1$ pokolorowanymi krawędziami. Gwarantuje to istnienie przynajmniej jednego koloru, którego nadanie krawędzi $\vec{x}\vec{y}$ nie spowoduje powstania jednokolorowego cyklu w grafie G . Dowód tezy twierdzenia możemy zapisać jako ciąg nierówności

$$\text{arb}_g(G) \leq \text{col}'_g(\vec{G}) \leq 3\Delta^+(\vec{G}) \leq 3\Delta^+(G) \leq 3\text{arb}(G).$$

\square

Orientacja \vec{G} , która wynika z lesistości grafu G jest zbliżona do optymalnej, jeśli chodzi o zminimalizowanie maksymalnego stopnia wyjścia. Pokażemy jednak,

że w niektórych przypadkach, może istnieć nieznacznie lepsza orientacja. Wprowadźmy dodatkowy parametr $L(G) = \max_{H \subseteq G} \frac{|E(H)|}{|V(H)|}$, gdzie maksimum brane jest po wszystkich podgrafach H grafu G . Między $L(G)$ a $\Delta^+(G)$ zachodzi bardzo ścisły związek.

Lemat 5.5. *Graf G posiada orientację \vec{G} o maksymalnym stopniu wyjścia równym co najwyżej k wtedy i tylko wtedy, gdy $L(G) \leq k$.*

Dowód pominiemy, można go znaleźć w wielu pracach (na przykład w [1]).

Lesistość grafu G możemy obliczyć ze wzoru Nash-Williamsa

$$\text{arb}(G) = \max_{H \subseteq G} \left\lceil \frac{|E(H)|}{|V(H)| - 1} \right\rceil,$$

gdzie maksimum jest również brane po wszystkich podgrafach grafu G . Choć $L(G)$ nie musi wyrażać się liczbą całkowitą, to zachodzi oczywista nierówność $L(G) \leq \text{arb}(G)$. Oba te parametry nie mogą się różnić zbyt znacznie, gdyż $\lceil L(G) \rceil = \text{arb}(G)$ lub $\lceil L(G) \rceil = \text{arb}(G) - 1$. Ponieważ istnieją grafy, dla których zachodzi druga równość, to teza poniższego twierdzenia wzmacnia nieco tezę twierdzenia 5.4.

Twierdzenie 5.6 ([8]). *Jeżeli G jest grafem, dla którego $L(G) \leq k$, to*

$$\text{arb}_g(G) \leq 3k.$$

Lesistość grafów planarnych wynosi co najwyżej 3, więc natychmiast dostajemy poniższy wniosek.

Wniosek 5.2. *Dla dowolnego grafu planarnego P zachodzi nierówność*

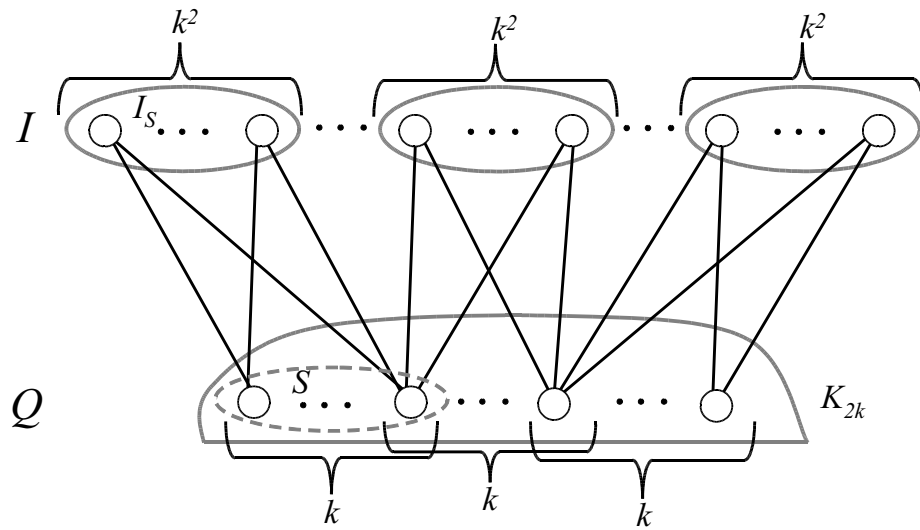
$$\text{arb}_g(P) \leq 9.$$

5.5 Ograniczenie dolne

Pokazaliśmy w poprzednim podrozdziale, że rozgrywaną lesistość można ograniczyć z góry przez liniową funkcję zwykłej lesistości. Okazuje się, że takie uniwersalne ograniczenie liniowe jest optymalne, a jedynym jego ulepszeniem może być obniżenie występującej w nim stałej 3. W niniejszym podrozdziale pokażemy, że rozgrywana lesistość może dowolnie dużo różnić się od swojego nierozgrywanego odpowiednika, a dolne ograniczenie jest również funkcją liniową ze stałą równą 2.

Zacznijmy od konstrukcji nieskończonej rodziny grafów, której elementy oznaczać będziemy przez H_k , dla $k \in \mathbb{N}$. Graf $H_k = (V, E)$, który nazywać będziemy *k-jeżem* (ang. *k-hedgehog*) definiujemy w następujący sposób (patrz rysunek 5.5):

- (i) $V = Q \cup I$, gdzie $Q \cap I = \emptyset$ oraz $|Q| = 2k$ i $|I| = \binom{2k}{k}k^2$,
- (ii) zbiór Q indukuje klikę K_{2k} , zaś zbiór I jest niezależny w H_k ,
- (iii) dla każdego k -elementowego zbioru $S \subseteq Q$ istnieje taki zbiór $I_S \subseteq I$ o mocy k^2 , że krawędzie pomiędzy wierzchołkami z S i I_S tworzą graf pełny dwudzielny K_{k,k^2} ,
- (iv) dla $S \neq T$ zbiory I_S i I_T są rozłączne,
- (v) w grafie H_k nie ma żadnych innych krawędzi.



Rysunek 5.5: Konstrukcja k -jeża

Klika K_{2k} jest szkieletem k -jeża, a jej krawędzie nazywać będziemy *kościami*. Krawędzie pomiędzy zbiorami Q i I nazywać będziemy *kolcami*.

Fakt 5.3. *Lesistość dowolnego grafu H_k wynosi dokładnie k .*

Dowód. Łatwo zauważyć (na przykład stosując wzór Nash-Williamsa), że $\text{arb}(K_{2k}) = k$, zatem $\text{arb}(H_k) \geq k$. Z drugiej strony acykliczne kolorowanie szkieletu (realizujące równość $\text{arb}(K_{2k}) = k$) można rozszerzyć do acyklicznego kolorowania całego jeża H_k . Wystarczy każde k kolców, mających wspólny wierzchołek w I pokolorować k różnymi kolorami, co nie spowoduje powstania jednokolorowego cyklu, a zatem $\text{arb}(H_k) = k$. \square

Zauważmy ponadto, że tylko takie kolorowanie kolców k -jeża jest optymalne. Jeżeli t kolców, mających wspólny wierzchołek w I otrzyma ten sam kolor, powiedzmy czerwony, to co najwyżej $2k - t$ kości może otrzymać kolor czerwony,

gdyż w przeciwnym wypadku powstałby czerwony cykl. Jest to oczywiste, gdyż graf acykliczny na $2k + 1$ wierzchołkach może mieć co najwyżej $2k$ krawędzi. Sugeruje to, że Placek, w celu wymuszenia w rozgrywce jak największej liczby kolorów, powinien starać się pokolorować jednym kolorem jak najwięcej kołców, mających wspólny wierzchołek w I .

Twierdzenie 5.7 ([8]). *Dla każdego k -jeża H_k zachodzi nierówność*

$$\text{arb}_g(H_k) \geq 2k - 2.$$

Dowód. Dla $k = 1$ lub 2 teza jest trywialna. Załóżmy, że $k \geq 3$ i gracze prowadzą rozgrywkę na H_k mając do dyspozycji $2k - 3$ kolorów. Placek koloruje wyłącznie kolce i załóżmy na wstępie, że Jacek koloruje wyłącznie kości. Pokażemy, że Placek może w taki sposób prowadzić rozgrywkę, aby w każdym z kolorów pojawiło się co najwyżej $k + 1$ kości. Załóżmy, że w pierwszym swoim ruchu Jacek pokolorował pewną krawędź $e \in Q$ kolorem czerwonym. Placek ustala dwa rozłączne k -elementowe podzbiory $S, T \subseteq Q$ oraz dwa wierzchołki $u \in I_S$ i $v \in I_T$, a następnie koloruje kolorem czerwonym dowolny kolec incydentny z jednym z nich. Jeżeli Jacek pokoloruje kolorem czerwonym pewną kość, to Placek, o ile będzie to możliwe, koloruje kolorem czerwonym kolec incydentny z wierzchołkiem u lub v . Ponieważ obaj gracze muszą unikać utworzenia monochromatycznego cyklu, to *czerwona faza* gry może potrwać co najwyżej $2k + 1$ ruchów, z których co najmniej k wykonał Placek. Istotnie, każdy czerwony ruch Jacka zmniejsza o co najwyżej jeden liczbę krawędzi pomiędzy wierzchołkami $\{u, v\}$ a Q , które mogą otrzymać kolor czerwony. Zatem w trakcie rozgrywki może pojawić się co najwyżej $k + 1$ czerwonych kości w grafie H_k .

Jeżeli Jacek wprowadzi do gry inny kolor zanim faza czerwona dobiegnie końca, to Placek natychmiast wybiera dwa nowe k -elementowe podzbiory w Q oraz dwa odpowiednie dla nich wierzchołki w I , rozpoczynając tym samym nową fazę gry w następnym kolorze. Zatem realna gra będzie składać się z wielu rozgrywanych równocześnie różnokolorowych faz, ale w każdej z nich pojawi się co najwyżej $k + 1$ kości w jednym kolorze. Jednak założyliśmy, że w grze dostępne są tylko $2k - 3$ kolory, co daje zwycięstwo Plackowi, bowiem nierówność

$$(2k - 3)(k + 1) < \binom{2k}{2}$$

oznacza, że jest ich za mało, aby szkielet jeża mógł być acyklicznie pokolorowany.

Pozostaje pokazanie, że również kolorowanie kołców nie przyniesie Jackowi żadnych korzyści. Ma on dwie możliwości. Może zacząć kolorować kolce incydentne z wybranymi wcześniej przez Placka wierzchołkami u i v , bądź kolorować kolce

incydentne z wierzchołkami niewybranymi przez Placka do żadnej z kolorowych faz. W pierwszym przypadku Placek kontynuuje rozpoczętą, powiedzmy czerwoną, fazę gry, a ponieważ kolców incydentnych z wierzchołkami u i v jest dokładnie $2k$, to co najmniej k z nich Placek zdaży pokolorować na czerwono. W drugim przypadku Placek może wręcz zignorować ruch Jacka i rozpocząć następną fazę gry w kolejnym kolorze, ustalając nową parę wierzchołków z I , a w przypadku, gdy fazy we wszystkich kolorach zostały już rozpoczęte, kontynuować jedną z nich. Każdy k -elementowy podzbiór zbioru Q jest połączony z wystarczającą liczbą wierzchołków z I , a więc Jacek bez trudu znajdzie wolną parę wierzchołków $u, v \in I$ niezbędną do rozpoczęcia nowej fazy rozgrywki. Gwarantuje mu to zwycięstwo i kończy dowód. \square

5.6 Uwagi końcowe i problemy otwarte

Rezultaty zawarte w niniejszym rozdziale pokazują, że rozgrywana lesistość wykazuje pewne anomalie (jak, na przykład, niemonotoniczność na braniu podgrafów) podobne do swojego wierzchołkowego pierwowzoru. Twierdzenie 5.4 mówi, że rozgrywana lesistość może być ograniczona przez funkcję (w tym przypadku liniową) zwykłej lesistości, co nie było możliwe w przypadku rozgrywanej liczby chromatycznej. Wynika z niego również, że jeżeli na pewnym grafie Jackowi wystarczy do zwycięstwa k kolorów, to wystarczy mu również $f(k) = 3k$ (i więcej) kolorów. Zaskakujące jest, że pytanie o istnienie takiej funkcji dla oryginalnej gry wierzchołkowej (hipoteza 1) jest nadal otwarte, choć intuicyjnie zwiększenie liczby kolorów nie powinno przynieść Jackowi żadnej szkody. W grze w zalesianie nie wiemy jednak, czy funkcję $f(k) = 3k$ możemy zoptymalizować do $f(k) = k + 1$.

Oznaczmy przez $\text{arb}_g(k)$ maksimum $\text{arb}_g(G)$ wzięte po wszystkich grafach G o lesistości co najwyżej k . Twierdzenia 5.4 i 5.7 dają nam liniową asymptotykę tego parametru względem k

$$2k - 2 \leq \text{arb}_g(k) \leq 3k.$$

Interesujące byłoby rozstrzygnięcie, które z powyższych ograniczeń jest bliższe prawdy. Rezultat z twierdzenia 5.1 może sugerować, że, być może, $\text{arb}_g(G) \leq d$ dla dowolnego d -zdegenerowanego grafu G . Ponieważ każdy graf o lesistości k jest $(2k - 1)$ -zdegenerowany (patrz fakt 4.3), to oznaczałoby to, że $\text{arb}_g(k) \leq 2k - 1$. Uprawnia nas to do zakończenia tego rozdziału postawieniem hipotezy.

Hipoteza 4. *Dla dowolnego grafu G zachodzi nierówność*

$$\text{arb}_g(G) \leq 2\text{arb}(G) - 1.$$

Spis literatury

- [1] N. Alon, M. Tarsi, *Colorings and orientations of graphs*, *Combinatorica* **12** (1992) 125–134.
- [2] S. D. Anders, *The game chromatic index of forests of maximum degree $\Delta \geq 5$* , *Discrete Applied Math.* **154** (2006) 1317–1323.
- [3] T. Bartnicki, *Niekooperacyjne gry na grafach i hipergrafach*, praca magisterska na Wydziale Nauk Ścisłych UZ w Zielonej Górze (2003), promotor M. Borowiecki.
- [4] T. Bartnicki, B. Brešar, J. Grytczuk, M. Kovše, Z. Miechowicz, I. Peterin, *Game chromatic number of Cartesian product graphs*, *Electronic J. Combinatorics* **15** (2008) #72, 13 pp. (electronic).
- [5] T. Bartnicki, J. Grytczuk, *A note on the game chromatic index of graphs*, *Graphs and Combinatorics* **24** (2008) 67–70.
- [6] T. Bartnicki, J. Grytczuk, *Four colours are not enough*, *Newsletter of European Mathematical Society* **69** (2008) 21–22.
- [7] T. Bartnicki, J. Grytczuk, *O dwóch takich, co kolorowali mapę*, *Delta* **376** (wrzesień, 2005) 12–13.
- [8] T. Bartnicki, J. Grytczuk, H. A. Kierstead, *The game of arboricity*, *Discrete Math.* **308** (2008) 1388–1393.
- [9] T. Bartnicki, J. Grytczuk, H. A. Kierstead, X. Zhu, *The map-coloring game*, *American Mathematical Monthly* **114** (2007) 793–803.
- [10] J. Beck, *Ramsey games*, *Discrete Math.* **249** (2002) 3–30.
- [11] J. Beck, *Positional games*, *Combin. Probab. Comput.* **14** (2005) 649–696.
- [12] M. Bednarska, *Kombinatoryczne gry na grafach*, praca doktorska na Wydziale Matematyki i Informatyki UAM w Poznaniu (2000), promotor T. Łuczak.

- [13] A. Beveridge, T. Bohman, A. Frieze, O. Pikhurko, *Game chromatic index of graphs with given restrictions on degrees*, Theoret. Comput. Sci. **407** (2008) 242–249.
- [14] H. L. Bodlaender, *On the complexity of some coloring games*, Internat. J. Found. Comput. Sci. **2** (1991) 133–147.
- [15] O. V. Borodin, *On acyclic colorings of planar graphs*, Discrete Math. **25** (1979) 211–236.
- [16] M. Borowiecki, E. Sidorowicz, *Generalised game colouring of graphs*, Discrete Math. **307** (2007) 1225–1231.
- [17] S. Brams, *Korespondencja osobista* (2003–2007)
- [18] S. A. Burr, P. Erdős, *On the magnitude of generalised Ramsey numbers*, Infinite and Finite Sets, Colloquium of the Mathematics Society Janos Bolyai, vol. 1, North Holland, Amsterdam/London
- [19] L. Cai, X. Zhu, *Game chromatic index of k -degenerate graphs*, J. Graph Theory **36** (2001) 144–155.
- [20] G. Chen, R. H. Schelp, W. E. Shreve, *A new game chromatic number*, Europ. J. Combinatorics **18** (1997) 1–9.
- [21] T. Dinski, X. Zhu, *Game chromatic number of graphs*, Discrete Math. **196** (1999) 109–115.
- [22] P.L. Erdős, U. Faigle, W. Hochstättler, W. Kern, *Note on the game chromatic index of trees*, Theoret. Comput. Sci. **313** (2004) 371–376.
- [23] U. Faigle, U. Kern, H. A. Kierstead, W. T. Trotter, *On the game chromatic number of some classes of graphs*, Ars Combin. **35** (1993) 143–150.
- [24] M. Gardner, *Mathematical games*, Scientific American (April, June, October, 1981).
- [25] B. Grünbaum, *Acyclic colorings of planar graphs*, Israel J. Maths. **14** (1973) 390–408.
- [26] D. Guan, X. Zhu, *The game chromatic number of outerplanar graphs*, J. Graph Theory **30** (1999) 67–70.
- [27] W. Imrich, S. Klavžar, *Product graphs: Structure and Recognition*, John Wiley & Sons, New York (2000).

- [28] R. E. Jamison, G. L. Matthews, J. Villalpando, *Acyclic colorings of products of trees*, Inform. Process. Lett. **99** (2006) 7–12.
- [29] H. A. Kierstead, *A simple competitive graph coloring algorithm*, J. Combin. Theory Ser. B **78** (2000) 57-68.
- [30] H. A. Kierstead, W. T. Trotter, *Planar graph coloring with an uncooperative partner*, J. Graph Theory **18** (1994) 569-584.
- [31] H. A. Kierstead, W. T. Trotter, *Competitive colorings of oriented graphs*, Electronic J. Combinatorics **8** (2001) #12, 15 pp. (electronic).
- [32] K. Makuszyński, *O dwóch takich, co ukradli księżyc*, pierwsze wydanie (1928)
- [33] E. Sidorowicz, *The game chromatic index of forests*, Referat na seminarium z matematyki dyskretnej na Wydziale Matematyki, Informatyki i Ekonometrii UZ w Zielonej Górze (2008).
- [34] J. Wu, X. Zhu, *Lower bounds for the game colouring number of partial k -trees and planar graphs*, Discrete Math. **308** (2008) 2637-2642.
- [35] X. Zhu, *The game coloring number of planar graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **75** (1999) 245-258.
- [36] X. Zhu, *Refined activation strategy for the marking game*, J. Combin. Theory Ser. B **98** (2008) 1-18.
- [37] X. Zhu, *Game colouring the Cartesian product of graphs*, J. Graph Theory **59** (2008) 261-278.