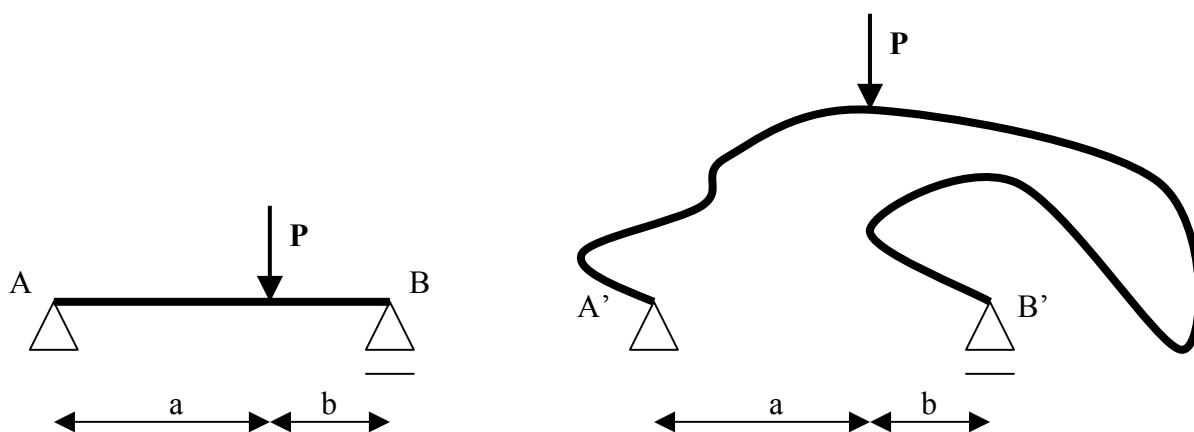


WYKRESY SIŁ WEWNĘTRZNYCH – RYSOWANIE Z „PAMIĘCI”

I. ZWIĄZKI MIĘDZY WYKRESAMI SIŁ WEWNĘTRZNYCH, RODZAJEM OBCIĄŻENIA ZWENĘTRZNEGO I SCHEMATEM STATYCZNYM KONSTRUKCJI.

1. Jeżeli w rozpatrywanym przedziale pręta $q(x)=0$ to siła poprzeczna jest funkcją stałą a moment gnący liniową.
2. Jeżeli w rozpatrywanym przedziale pręta $q(x)\neq 0$ to siła poprzeczna jest funkcją o 1 stopień wyższą niż $q(x)$, a moment gnący o 2 stopnie wyższą np. $q(x)=const$, więc $T(x)=ax+b$, $M(x)=ax^2+bx+c$. Wypukłość parabol momentu gnącego jest zawsze skierowana zgodnie ze zwrotem obciążenia $q(x)$.
3. Jeżeli siła poprzeczna jest dodatnia, to wykres momentu gnącego opada (rośnie w sensie algebraicznym) przy posuwaniu się od lewej strony wykresu do prawej.
4. Jeżeli siła poprzeczna jest ujemna, to wykres momentu gnącego wznosi się (maleje w sensie algebraicznym) przy posuwaniu się od lewej strony wykresu do prawej.
5. Jeżeli przy przejściu przez 0 funkcja sił poprzecznych zmienia znak, to funkcja momentu gnącego osiąga w tym punkcie ekstremum. Maksimum przy zmianie znaku z „+” na „-”; minimum przy zmianie znaku z „-” na „+”.
6. W przekroju pręta, w którym przyłożona jest siła skupiona prostopadła (równoległa, moment gnący) do osi pręta, na wykresie sił poprzecznych (osiowych, momentu gnącego) powstaje skok o wartość tej siły (momentu).
7. Jeżeli obciążenie pręta stanowi wiele sił skupionych prostopadłych do jego osi, to ekstremalny moment gnący wystąpi w przekroju, w którym siła poprzeczna zmienia znak. W punktach przyłożenia pozostałych sił skupionych wykres momentu załamuje się.
8. Na skrajnej podporze przegubowej, przegubie wewnętrznym i swobodnym końcu pręta funkcja momentu gnącego zeruje się (wyjątek – patrz punkt I.6).
9. Istnienie nieobciążonego przegubu wewnętrznego nie ma wpływu na rozkład sił poprzecznych i osiowych.
10. Wartości reakcji podporowych nie zależą od kształtu konstrukcji, a jedynie od wzajemnego usytuowania podpór i obciążenia zewnętrznego.

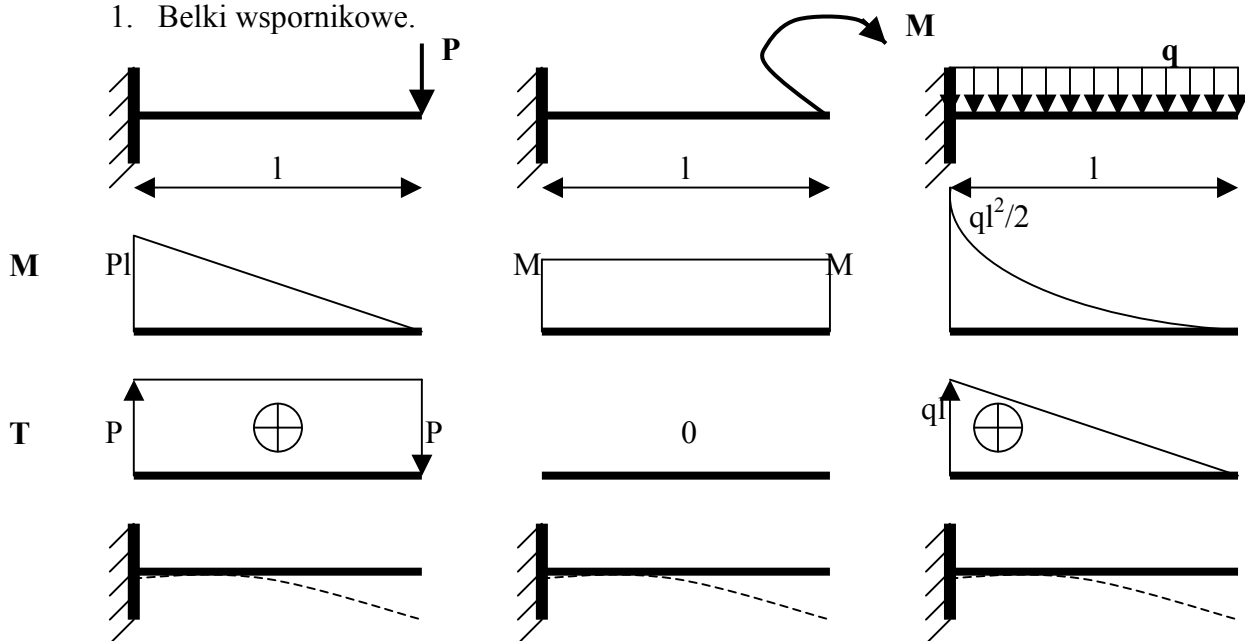


$$H_A=H_{A'} ; V_A=V_{A'} ; R_B=R_{B'}$$

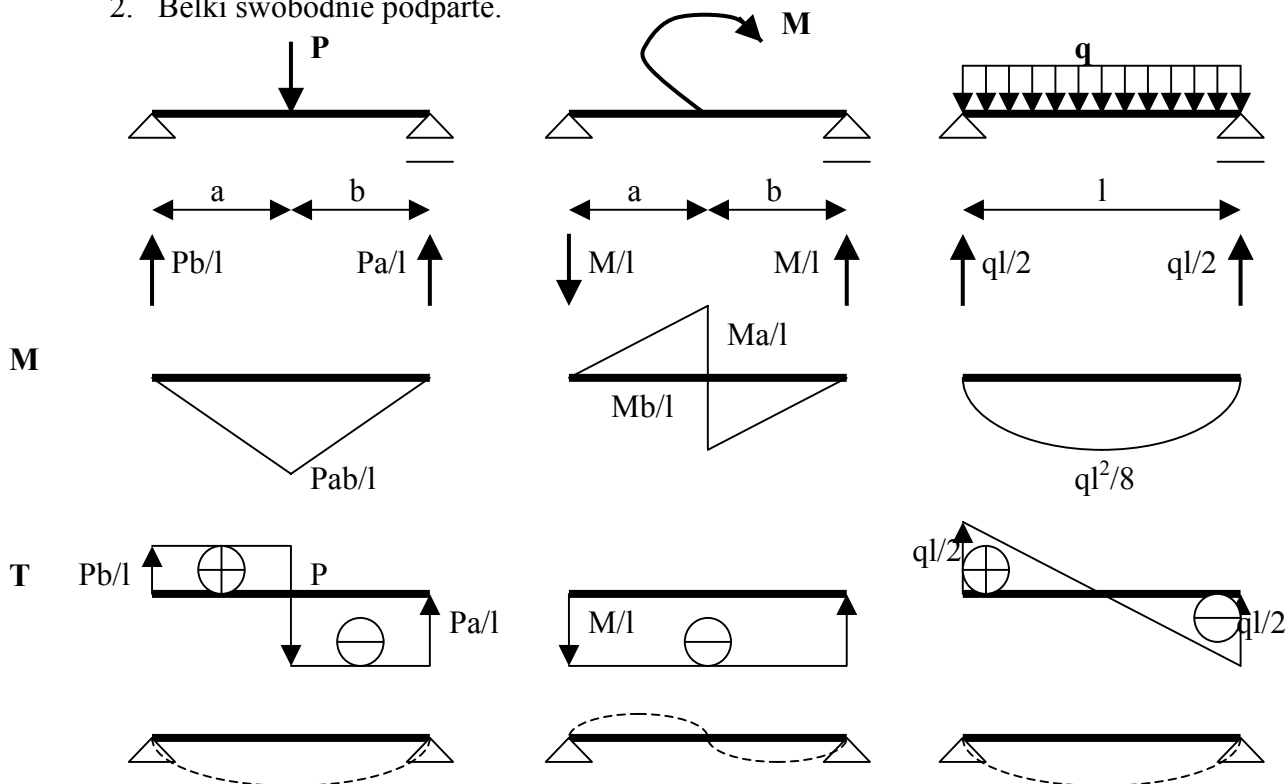
Większość z podanych powyżej związków wynika z faktu, iż siła poprzeczna jest pierwszą pochodną momentu gnącego.

II. WYKRESY SIŁ WEWNĘTRZNYCH I LINII UGIĘCIA DLA BELEK PROSTYCH.

1. Belki wspornikowe.



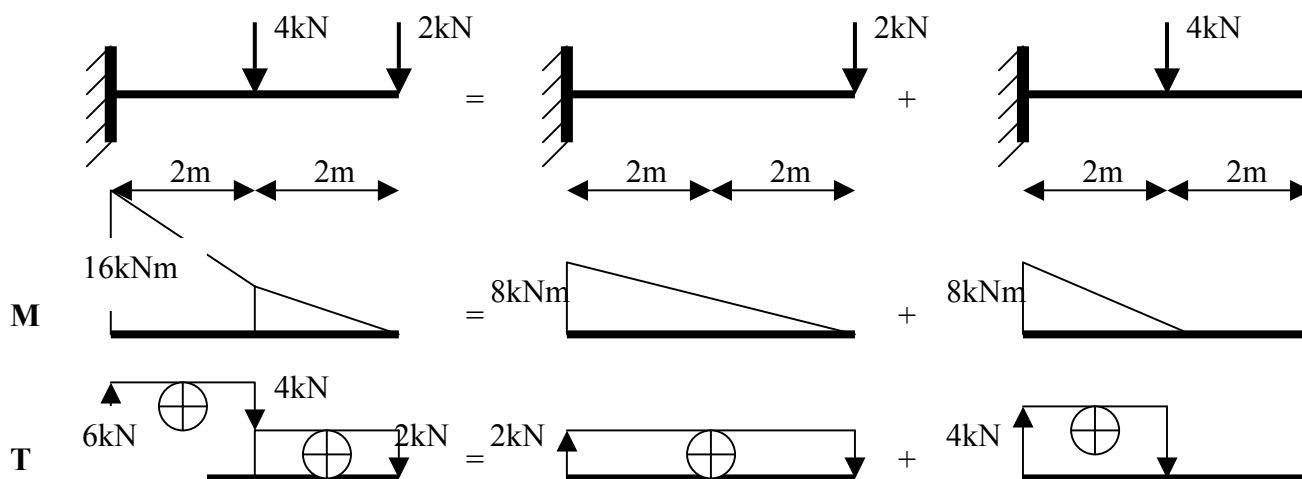
2. Belki swobodnie podparte.



III. ZASADA SUPERPOZYCJI (DODAWANIA SKUTKÓW).

Jeżeli układ obciążony jest kilkoma rodzajami obciążenia zewnętrznego (np. kilka sił skupionych + moment gnący + obciążenie równomierne), to można sporządzić wykresy sił wewnętrznych od każdego obciążenia z osobna, a następnie dodać je do siebie.

Przykład



IV. TOK POSTĘPOWANIA PRZY RYSOWANIU „Z PAMIĘCI” WYKRESÓW SIŁ WEWNĘTRZNYCH.

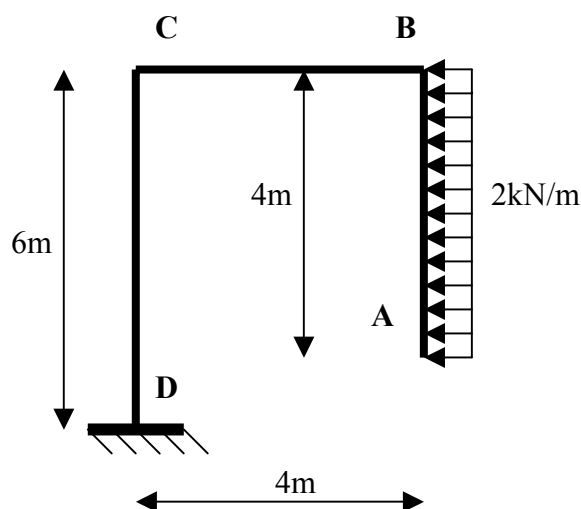
1. Analiza kinematyczna i statyczna. Jeśli układ jest geometrycznie niezmienny i statycznie wyznaczalny można przejść do punktu 2.
2. Określenie typu konstrukcji:
 - a. belki i ramy wspornikowe – punkt **V**;
 - b. belki i ramy podparte przegubowo – punkt **VI**;
 - c. ramy trójprzegubowe symetryczne – punkt **VII**;
 - d. ramy trójprzegubowe niesymetryczne – punkt **VIII**;
 - e. belki i ramy złożone – punkt **IX**:
 - podział na elementy niezależne i zależne;
 - określenie typu każdego elementu;
 - wykorzystanie punktów V, VI, VII, VIII w zależności od typu elementu.

V. BELKI I RAMY WSPORNIKOWE.

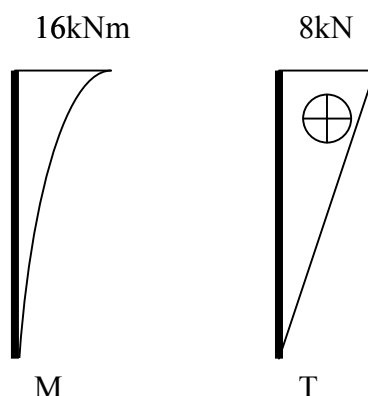
W tego typu konstrukcjach można od razu rysować wykresy sił wewnętrznych, pomijając etap obliczania reakcji. Analizę należy rozpocząć od swobodnego końca układu. W przypadku ramy złożonej z kilku prętów każdy pręt można potraktować jak prosty wspornik utwierdzony w miejscu połączenia z kolejnym prętem (punkt II.1.). Przy rysowaniu wykresów pomocne będą następujące zasady :

- intuicyjne naszkicowanie linii ugięcia wspornika wskaże po której stronie narysować wykres momentu gnącego (wykres ten należy rysować zawsze po stronie włókien rozciąganych);
- w połączeniach prętów pod kątem wykres momentu musi być ciągły (wartość na końcu jednego pręta musi być równa wartości na początku drugiego);
- obciążenie równoległe do osi pręta wywołuje w tym pręcie stały moment gnący;
- w punktach leżących na przecięciu kierunku działania siły i osi pręta moment gnący zeruje się;

Przykład

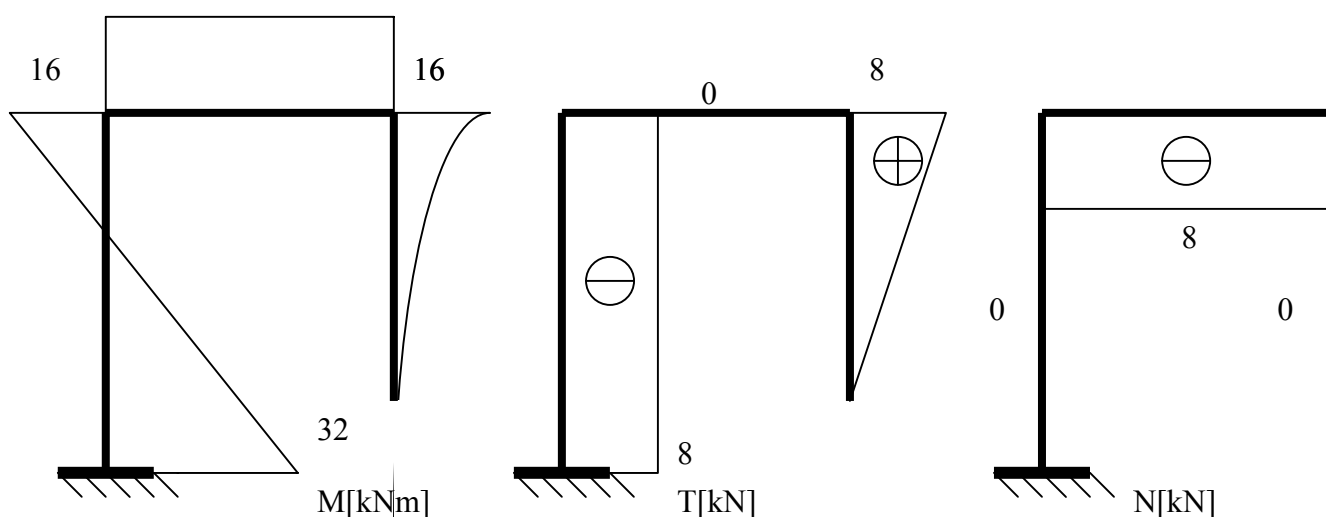


Pręt AB można potraktować jak wspornik utwierdzony w punkcie B. Wobec tego przebieg wykresów sił wewnętrznych będzie następujący :



Z warunku ciągłości funkcji momentu wynika, że w punkcie B pręta BC wartość momentu również wynosi 16kNm. Obciążenie równomierne jest równoległe do pręta BC, z czego wynika stała wartość momentu na całej długości pręta (ramię siły wypadkowej obciążenia jest takie same dla każdego punktu pręta BC). Jeżeli $M = \text{const}$ to $T = 0$. Ze zwrotu wypadkowej obciążenia równomiernego wynika, iż pręt BC jest ściskany, więc $N = -8\text{kNm}$.

Z uwagi na ciągłość funkcji momentu jego wartość w punkcie C pręta CD również wynosi 16kNm. W punkcie znajdującym się 2m poniżej C wartość momentu wynosi 0, gdyż przez ten punkt przechodzi linia działania siły wypadkowej obciążenia równomiernego. Wartość momentu w punkcie D można wyznaczyć z proporcji ($M/4 = 16/2$, więc $M = 32\text{kNm}$). Ponieważ posuwając się od lewej do prawej strony pręta CD wykres momentów wznosi się ku górze, więc siła poprzeczna będzie dodatnia i równa wypadkowej obciążenia równomiernego. W pręcie CD nie występują obciążenia działające wzdłuż jego osi, więc $N = 0$.

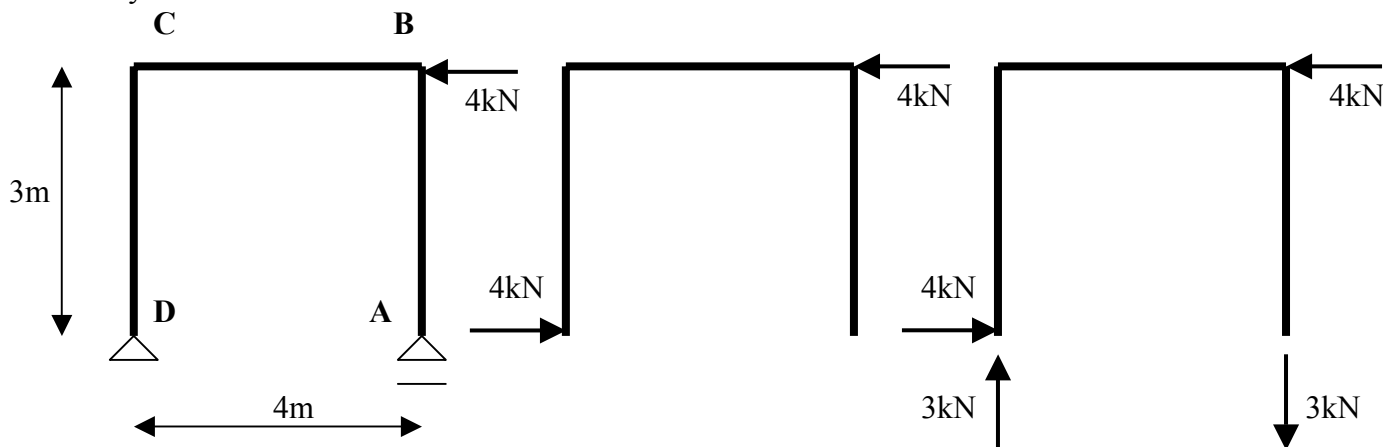


VI. BELKI I RAMY PODPARTE PRZEGUBOWO.

W tych konstrukcjach jedną z reakcji (najczęściej poziomą) można znaleźć od razu wykorzystując warunek równowagi w postaci sumy rzutów wszystkich sił na jedną z osi układu

współrzędnych (działanie to można wykonać w pamięci – reakcja musi być równa co do wartości przyłożonemu obciążeniu na danym kierunku i mieć przeciwny zwrot). Reakcja ta łącznie z odpowiadającym jej obciążeniem zewnętrznym daje moment (para sił), który musi zostać zrównoważony przez moment od pozostałych reakcji na drugim kierunku. Na tej podstawie ustalamy zwroty tych reakcji i ich wartości – wartość momentu podzielona przez odległość między reakcjami. Znając wszystkie reakcje można narysować wykresy sił wewnętrznych traktując pręty składowe jak wsporniki (patrz punkt V).

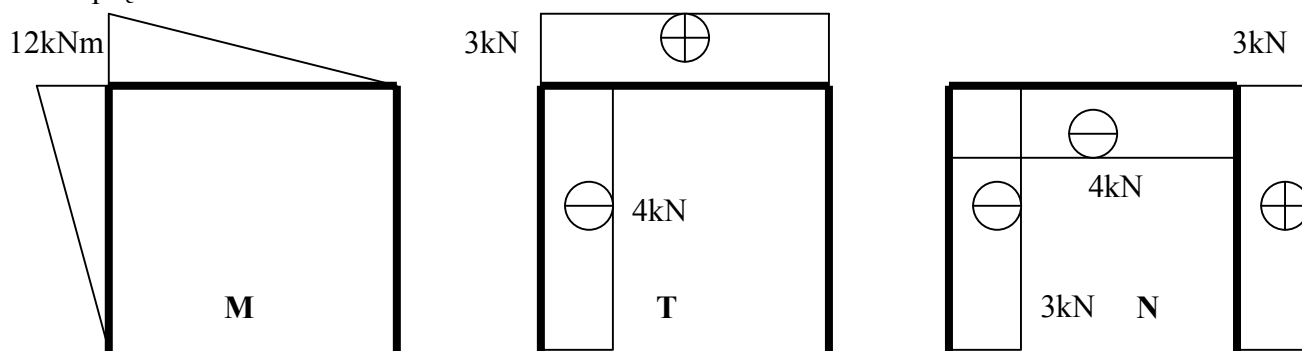
Przykład



Rama obciążona jest siłą poziomą w punkcie B, jedynym miejscem, w którym może powstać reakcja na to obciążenie, jest punkt D. Siła zewnętrzna i reakcja pozioma mają te same kierunki i wartości, lecz przeciwny zwrot i są przesunięte względem siebie o ramię 3m. Są więc parą sił wywołującą moment o wartości $4\text{kN} \times 3\text{m} = 12\text{kNm}$ obracający konstrukcję przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Ponieważ układ ma być w równowadze, więc moment ten musi być zrównoważony przez kolejny moment o wartości 12kNm działający zgodnie z ruchem wskazówek zegara i wywołany parą sił pionowych. Na tej podstawie można ustalić zwroty reakcji pionowych i ich wartości (moment 12kNm podzielony przez ramię 4m daje wartość siły 3kN).

Po wyznaczeniu reakcji można przejść do rysowania wykresów sił wewnętrznych. Pręty AB i CD można potraktować jako wsporniki utwierdzone odpowiednio w punktach B i C, obciążone siłami skupionymi na końcach. W pręcie CD moment rozciąga włókna po lewej stronie i przybiera wartości od 0 w D do 12kNm w C, siła poprzeczna jest ujemna (bo od lewej do prawej wykres momentów wznosi się do góry) i ma wartość reakcji poziomej (prostopadłej do tego pręta). Z kolei reakcja pionowa wywołuje ścisnienie, stąd $N = -3\text{kN}$. Pręt AB będzie tylko rozciągany siłą 3kN .

Wykres momentów w pręcie poziomym można narysować znając wartości momentu w punktach C (12kNm) i D (0kNm) i wiedząc, że na długości tego pręta nie ma obciążeń zewnętrznych. Wobec tego wystarczy połączyć obie wartości linią prostą. Od lewej do prawej wykres momentów opada, więc siła poprzeczna będzie dodatnia i przyjmie wartość siły prostopadłej do tego pręta czyli reakcji 3kN . Obie siły poziome (zewnętrzna i reakcja) wywołują w pręcie BC ścisnienie – 4kN .

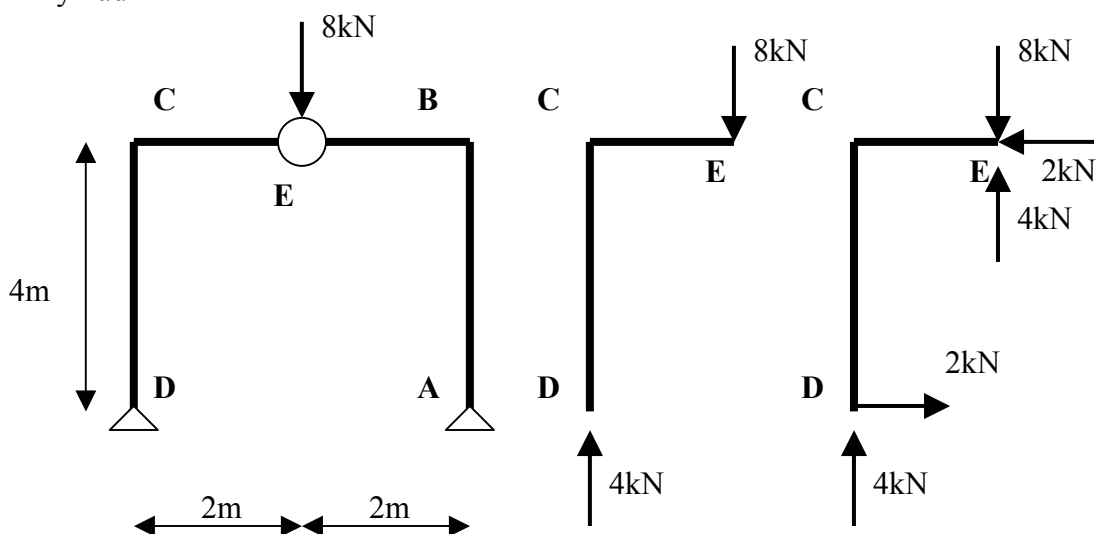


Sprawdzeniem poprawności otrzymanych wykresów może być badanie równowagi (suma momentów i sumy rzutów sił na obie osie) wyciętych z konstrukcji węzłów np. C i B.

VII. RAMY TRÓJPRZEGUBOWE SYMETRYCZNE.

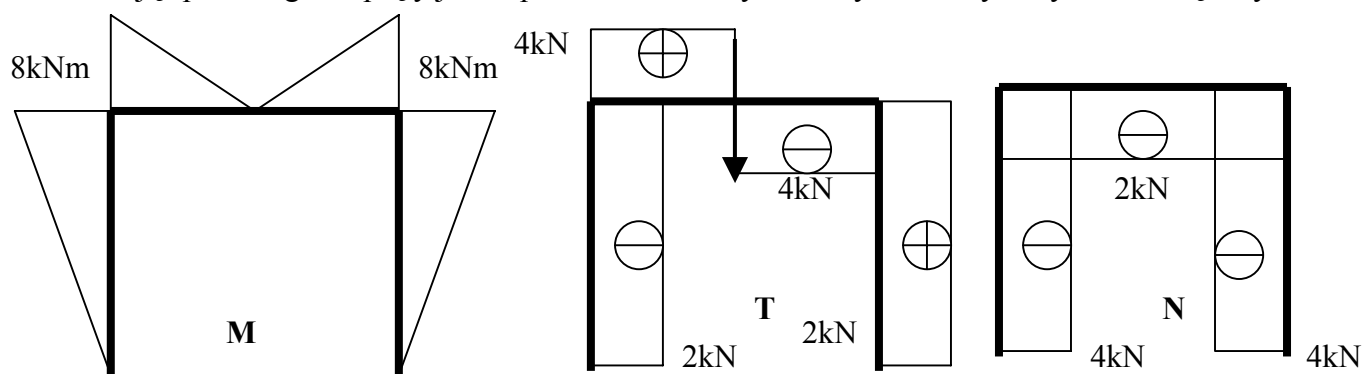
Reakcje pionowe w przegubach zewnętrznych w takich ramach należy obliczyć wykorzystując warunek równowagi w postaci sumy rzutów sił na oś pionową oraz symetrię układu (obie reakcje muszą być równe co do wartości i mieć te same zwroty). W przeciwieństwie do ram podpartych przegubowo, w tych konstrukcjach, nawet przy braku obciążenia poziomego, powstaną **reakcje poziome**. Można je znaleźć rozpatrując równowagę jednej z części ramy i obliczając (w pamięci) sumę momentów względem środkowego przegubu. Reakcje poziome w drugiej ramie będą miały te same wartości lecz przeciwne zwroty (symetria). Po wyznaczeniu reakcji siły wewnętrzne można obliczyć traktując pręty składowe jak wsporniki (patrz punkt V).

Przykład



Z symetrii układu wynika, że reakcje pionowe w punktach A i D będą skierowane do góry i będą miały wartość 4kN. Następnie siłę zewnętrzną 8kN należy arbitralnie przyporządkować do jednej z ram składowych (dowolnej) i rozpatrzeć jej równowagę. Najwygodniej będzie obliczyć w pamięci sumę momentów względem punktu E. Reakcja pionowa 4kN daje względem punktu E moment $4\text{kN} \times 2\text{m} = 8\text{kNm}$ obracający układ zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Moment ten musi zostać zrównoważony przez moment pochodzący od reakcji poziomych w punktach D i E. Ich wartości wynoszą $8\text{kNm}/4\text{m} = 2\text{kN}$. Należy jeszcze sprawdzić sumę rzutów wszystkich sił na oś pionową. W celu zapewnienia równowagi w punkcie E musi pojawić się pionowa reakcja o wartości 4kN.

Wykorzystując reakcje obliczone dla jednej z ram składowych oraz symetrię układu i traktując poszczególne pręty jak wsporniki można szybko narysować wykresy sił wewnętrznych.



VIII. RAMY TRÓJPRZEGUBOWE NIESYMETRYCZNE.

W tego rodzaju układach na ogół wyznaczenie „w pamięci” reakcji jest dość trudne. Można je policzyć analitycznie wykorzystując warunki równowagi statyki. Po wyznaczeniu reakcji siły wewnętrzne można obliczyć w pamięci traktując pręty składowe jak wsporniki (patrz punkt V).

IX. BELKI I RAMY ZŁOŻONE.

Konstrukcje złożone składają się z 2 rodzajów elementów :

- elementy niezależne – są geometrycznie niezmiennie i mogą istnieć samodzielnie;
- elementy zależne – są geometrycznie zmienne i nie mogą samodzielnie przenosić obciążenia.

Obliczenia należy rozpocząć od elementów zależnych. Po zakwalifikowaniu elementu do określonego typu układów można wyznaczyć w nich reakcje i siły wewnętrzne (punkty V, VI, VII, VIII). Reakcjami z nich są następnie obciążane elementy niezależne. Tu tok postępowania się powtarza. Przy rysowaniu wykresów pomocne będą następujące zasady:

- w przegubach wewnętrznych wartość momentu gnącego wynosi 0;
- na wewnętrznych podporach przegubowych wykres momentów załamuje się, a jego wartość w tym punkcie można znaleźć wykorzystując proporcje;
- przeguby wewnętrzne nie mają wpływu na rozkład sił poprzecznych i normalnych;
- na wewnętrznych podporach przegubowych na wykresie sił poprzecznych powstaną skoki o wartościach równych reakcjom na tych podporach.