

$$\alpha(x_1, \dots, x_p) := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_p)$$

(iii) JEŚLI $x, y \in \mathbb{R}^p$ i $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, TO

$$-x := (-1)x, \quad x - y := x + (-y), \quad \frac{x}{\alpha} := \frac{1}{\alpha}x, \quad 0 := (0, \dots, 0);$$

(iv) JEŚLI $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, TO LICZBĘ

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2}$$

NAZYWAMY NORMAT (DŁUGOŚCIĄ) WEKTORA x .

Twierdzenie 1. JEŚLI $x, y \in \mathbb{R}^p$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, TO

$$\|x\| \geq 0,$$

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0},$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Definicja 2. Mówimy, że ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ funkcji przeszerzeni $\mathbb{R}^p$ jest zbieżny do punktu $x_0 \in \mathbb{R}^p$, co zapisujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \quad \text{lub} \quad x_n \rightarrow x_0,$$

gdzie

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n \geq n_0} \|x_n - x_0\| < \varepsilon.$$

Definicja 3. Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^p$ nazywamy punktem skupienia zbioru $A \subset \mathbb{R}^p$, gdy istnieje ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elementów zbioru $A \setminus \{x_0\}$, zbieżny do x_0 . Zbiór wszystkich punktów skupienia zbioru A będziemy oznaczać A^d . Punkt zbioru A nazywamy jego punktem izolowanym, gdy nie jest punktem skupienia zbioru A .

Definicja 4. Niech $A \subset \mathbb{R}^p$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^q$ i $x_0 \in A^d$. Mówimy, że punkt $y_0 \in \mathbb{R}^q$ jest granicą funkcji f w punkcie x_0 , co zapisujemy:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0,$$

gdzie

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in A} (0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - y_0\| < \varepsilon).$$

Twierdzenie 2. Każda funkcja w każdym punkcie skupienia swojej dziedziny ma co najwyżej jedną granicę.

46.

Twierdzenie 3. Niech $A \subset \mathbb{R}^d$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^q$, $x_0 \in A^d$ i $y_0 \in \mathbb{R}^q$.
 Wtedy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0 \text{ dla każdego}$$

zbieżnego do punktu x_0 ciągu
 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktów zbioru $A \setminus \{x_0\}$.

Przykład 1. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x+y \neq 0\}$ i niech
 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją o wzorze

$$f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}.$$

Oczywiście $(0, 0) \in A^d$ oraz

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} = -\frac{y}{y} = -1, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

oraz

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} = \frac{x}{x} = 1, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Zatem $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = -1$ i $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = 1$; ponadto
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - 0}{\frac{1}{n} + 0} = 1$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0 - \frac{1}{n}}{0 + \frac{1}{n}} = -1$,

a więc, wobec twierdzenia 3, nie istnieje granica
 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$.

Definicja 5. Niech $A \subset \mathbb{R}^d$ i niech $f: A \rightarrow \mathbb{R}^q$. Funkcję
 f nazywamy

- ciągłą w punkcie $x_0 \in A$, gdy

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in A} (||x - x_0|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)|| < \varepsilon);$$

- ciągłą, gdy jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in A$.

Twierdzenie 4. Niech $A \subset \mathbb{R}^d$, $B \subset \mathbb{R}^q$ i niech $f: A \rightarrow \mathbb{R}^q$
 i $g: B \rightarrow \mathbb{R}^r$, przy czym $f(x) \in B$ dla każdego $x \in A$. Jeśli
 funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 \in A$, a funkcja g
 jest ciągła w punkcie $f(x_0)$, to funkcja $g \circ f$ jest
 ciągła w punkcie x_0 .

Łnienie 1. Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją
 ciągłą.

Twierdzenie 5. Niech $A \subset \mathbb{R}^d$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^q$ i $x_0 \in A$. Funkcja
 f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ dla każdego zbieżnego do x_0 ciągu $(x_n)_n$
 punktów zbioru A .

47.10.06.21

PRZYKŁAD 2. OKREŚLIĆ FUNKCJĘ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ LIZCEN

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{gdzi } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{gdzi } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

DLA KAŻDEGO $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ MAMY

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0 = f(x,0).$$

PONADTO $f(0,y) = 0$ DLA KAŻDEGO $y \in \mathbb{R}$. ZATEM, DLA KAŻDEGO $x \in \mathbb{R}$, FUNKCJA $f(x, \cdot)$ JEST CIĄGŁA. PODOBNIE, DLA KAŻDEGO $y \in \mathbb{R}$, FUNKCJA $f(\cdot, y)$ JEST CIĄGŁA. Z DRUGIEJ STRONY, DLA KAŻDEGO $c \in \mathbb{R}$ MAMY

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, a\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + a^2\frac{1}{n^2}} = \frac{a}{1+a^2}.$$

A NIĘC, ŁOBEC TWIERDZENIA 5, FUNKCJA f NIE JEST CIĄGŁA W PUNKCIE $(0,0)$.

LEMMA 2. NIECH $A \subset \mathbb{R}^d$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ I $g: A \rightarrow \mathbb{R}$. JEŚLI FUNKCJE f I g SA CIĄGŁE W PUNKCIE $x_0 \in A$ [CIĄGŁE], TO CIĄGŁE W PUNKCIE x_0 [CIĄGŁE] SA TEŻ FUNKCJE $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ ORAZ, JEŚLI $g(x) \neq 0$ DLA KAŻDEGO $x \in A$, FUNKCJA $\frac{f}{g}$.

Twierdzenie 6. NIECH $A \subset \mathbb{R}^d$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^q$ I $x_0 \in A$. FUNKCJA f JEST CIĄGŁA W PUNKCIE x_0 LUBY I TYLKO LUBY, GDY $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

DEFINICJA 6. NIECH $A \subset \mathbb{R}^d$, $x_0 \in A$ I NIECH $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty : \Leftrightarrow \bigwedge_{L \in \mathbb{R}} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in A} (0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow f(x) < L)$

ORAZ

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty : \Leftrightarrow \bigwedge_{L \in \mathbb{R}} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in A} (0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow f(x) > L).$

Twierdzenie 7. NIECH $A \subset \mathbb{R}^d$, $x_0 \in A$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ I NIECH $u_0 \in \mathbb{R}$ I $v_0 \in \mathbb{R}$, PRZY CZYM

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = u_0 \text{ I } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = v_0.$$

(i) JEŚLI WYRAŻENIE $u_0 + v_0$ JEST OKREŚLONE, TO
 $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = u_0 + v_0.$

(ii) JEŚLI WYRAŻENIE $u_0 - v_0$ JEST OKREŚLONE, TO
 $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = u_0 - v_0.$

48.

(iii) JEŚLI WYRAŻENIE $u_0 v_0$ JEST OKREŚLONE, TO

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = u_0 v_0.$$

(iv) JEŚLI WYRAŻENIE $\frac{u_0}{v_0}$ JEST OKREŚLONE, TO ISTNIEJE TAKA LICZBA $\rho \in (0, +\infty)$, ŻE $g(x) \neq 0$ DLA KAŻDEGO $x \in A \setminus \{x_0\}$ SPEŁNIĄCEGO WARUNEK $\|x - x_0\| < \rho$ ORAZ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u_0}{v_0}.$$

Twierdzenie 8. (o zachowaniu nierównościw granicy). Niech $A \subset \mathbb{R}^p$, $x_0 \in A$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ i niech $u_0 \in \mathbb{R}$ i $v_0 \in \mathbb{R}$, przy czym

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = u_0 \text{ i } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = v_0.$$

JEŚLI ISTNIEJE TAKA LICZBA $\rho \in (0, +\infty)$, ŻE

$$f(x) \leq g(x), \quad x \in A \setminus \{x_0\}, \quad \|x - x_0\| < \rho,$$

TO $u_0 \leq v_0$.Twierdzenie 9 (o trzech funkcjach). Niech $A \subset \mathbb{R}^p$, $x_0 \in A$ i niech $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: A \rightarrow \mathbb{R}$, $h: A \rightarrow \mathbb{R}$. Załóżmy istnienie takiej liczby $\rho \in (0, +\infty)$, że

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad x \in A \setminus \{x_0\}, \quad \|x - x_0\| < \rho.$$

JEŚLI FUNKCJE f i h MAJĄ TE SAME GRANICE $y_0 \in \mathbb{R}$ W PUNKCIE x_0 , TO

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0.$$

12. Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych.Definicja 1. Niech $x_0 \in \mathbb{R}^p$ i $\rho \in (0, +\infty)$. Zbiór

$$K(x_0, \rho) := \{x \in \mathbb{R}^p : \|x - x_0\| < \rho\}$$

nazwamy kulą (otwartą) o środku x_0 i promieniu ρ .Definicja 2. Zbiór $U \subset \mathbb{R}^p$ nazwamy otwartym, gdy dla każdego $x \in U$ istnieje takie $\rho \in (0, +\infty)$, że $K(x, \rho) \subset U$.Ustalmy liczby $p, q \in \mathbb{N}$ i zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^p$.Definicja 3. Pólowymy, że funkcja $f: U \rightarrow \mathbb{R}^q$ ma w punkcie $x_0 \in U$ pochodną kierunkową w kierunku wektora $a \in \mathbb{R}^p$, gdy istnieje granica

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t};$$

49.

GRANICE ∇f , JEŚLI ISTNIEJE, OZNACZAMY $\nabla_x f(x_0)$:

$$\nabla_x f(x_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t}$$

I NAZYWAMY POCHODNĄ KIERUNKOWĄ FUNKCJI f W PUNKCIE x_0 W KIERUNKU WEKTORA e .

Niech

$$e_i := (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i}), \quad i \in \{1, \dots, p\}.$$

DEFINICJA 4. Niech $f: U \rightarrow \mathbb{R}^q$.

(i) Jeśli $i \in \{1, \dots, p\}$, to mówimy, że funkcja f ma w punkcie $x_0 \in U$ pochodną cząstkową względem i -tej zmiennych, gdy ma w x_0 pochodną kierunkową w kierunku wektora e_i ; wektor $\nabla_{e_i} f(x_0)$ nazywamy wtedy pochodną cząstkową względem i -tej zmiennych funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy $\partial_i f(x_0)$.

(ii) Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $x_0 \in U$ wszystkie pochodne cząstkowe, gdy ma w x_0 pochodne cząstkowe względem i -tej zmiennych dla każdego $i \in \{1, \dots, p\}$.

DEFINICJA 5. Niech $f: U \rightarrow \mathbb{R}^q$. Funkcje $f_1, \dots, f_q: U \rightarrow \mathbb{R}$, spełniające warunek

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_q(x)), \quad x \in U,$$

nazywamy składowymi funkcji f .

DEFINICJA 6. Niech $f: U \rightarrow \mathbb{R}^q$ i niech $f_1, \dots, f_q: U \rightarrow \mathbb{R}$ będą składowymi funkcji f . Załóżmy, że f ma wszystkie pochodne cząstkowe w punkcie $x_0 \in U$. Wtedy macierz

$$[\partial_i f_j(x_0)]_{q \times p} := \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \dots & \partial_p f_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_q(x_0) & \dots & \partial_p f_q(x_0) \end{bmatrix} \quad (1)$$

nazywamy macierzą JACOBIEGO (LUB POCHODNĄ) funkcji f w punkcie x_0 .

Jeśli ponadto $p=q$, to wyznacznik macierzy (1) nazywamy JAKOBIANEM funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy przez $J_f(x_0)$.

Jeśli $q=1$, to pochodną funkcji f w punkcie x_0

50.

NACZYLIAMY GRADIENTEM FUNKCJI f W PUNKCIE x_0 I OZNACZAMY CZASAMI $\nabla f(x_0)$ LUB GRAD $f(x_0)$:

$$\text{GRAD } f(x_0) = [\partial_1 f(x_0), \dots, \partial_p f(x_0)].$$

Twierdzenie 1. Jeśli funkcja $f: U \rightarrow \mathbb{R}^q$ ma w punkcie $x_0 \in U$ wszystkie pochodne cząstkowe i pochodne te są ciągłe w punkcie x_0 , to f jest ciągła w x_0 .

Twierdzenie 2. Niech $f: U \rightarrow \mathbb{R}^q$ i $g: U \rightarrow \mathbb{R}^r$ będą funkcjami mającymi w punkcie $x_0 \in U$ wszystkie pochodne cząstkowe. Jeśli $a, b \in \mathbb{R}$, to funkcja $af + bg$ ma wszystkie pochodne cząstkowe w x_0 oraz

$$\partial_i (af + bg)(x_0) = a \partial_i f(x_0) + b \partial_i g(x_0), \quad i = 1, \dots, p.$$

Twierdzenie 3. Niech $f: U \rightarrow \mathbb{R}^q$ i $g: V \rightarrow \mathbb{R}^r$, gdzie $V \subset \mathbb{R}^q$ jest takim zbiorem otwartym, że $f(U) \subset V$. Jeśli funkcja f ma wszystkie pochodne cząstkowe w punkcie $x_0 \in U$, a funkcja g ma wszystkie pochodne cząstkowe w punkcie $f(x_0)$, to funkcja $g \circ f$ ma wszystkie pochodne cząstkowe w punkcie x_0 oraz

$$\begin{bmatrix} \partial_1 (g \circ f)_1(x_0) & \dots & \partial_p (g \circ f)_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 (g \circ f)_r(x_0) & \dots & \partial_p (g \circ f)_r(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 g_1(f(x_0)) & \dots & \partial_q g_1(f(x_0)) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 g_r(f(x_0)) & \dots & \partial_q g_r(f(x_0)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \dots & \partial_p f_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_q(x_0) & \dots & \partial_p f_q(x_0) \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 4. Niech $f: U \rightarrow \mathbb{R}^q$ i niech $f_1, \dots, f_q: U \rightarrow \mathbb{R}$ będą rozkładowymi funkcjami f .

(i) Funkcja f ma wszystkie pochodne cząstkowe w punkcie $x_0 \in U$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje $f_1, \dots, f_q$ mają wszystkie pochodne cząstkowe w punkcie x_0 .

(ii) Jeśli f ma wszystkie pochodne cząstkowe w $x_0 \in U$, to

$$\partial_i f(x_0) = (\partial_i f_1(x_0), \dots, \partial_i f_q(x_0)), \quad i = 1, \dots, p.$$

51.

USTALMY TERAZ LICZBĘ PEŁNĄ I ZBIÓR OTWARTY $U \subset \mathbb{R}^p$.

Twierdzenie 5. Niech $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowaną w punkcie $x_0 \in U$. Jeśli funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne, to

$$\delta_i f(x_0) = 0, \quad i = 1, \dots, p.$$

Definicja 7. Niech $f: U \rightarrow \mathbb{R}^q$, gdzie $q \in \mathbb{N}$.

(i) Jeśli $i, j \in \{1, \dots, p\}$, to mówimy, że funkcja f ma w punkcie $x_0 \in U$ drugą pochodną cząstkową względem pary (i, j) -tych zmiennych, gdy w każdym punkcie pewnego otoczenia $U_0 \subset U$ punktu x_0 ma pochodną cząstkową względem i -tej zmiennej i pochodną ta ma w punkcie x_0 pochodną cząstkową względem j -tej zmiennej; pochodną tę oznaczamy $\delta_{ij}^2 f(x_0)$.

i nazywamy drugą pochodną cząstkową drugiego rzędu względem pary (i, j) -tych zmiennych w punkcie x_0 funkcji f .

(ii) Mówimy, że funkcja f jest klasy C^2 , gdy w każdym punkcie zbioru U ma pochodne cząstkowe drugiego rzędu względem każdej pary zmiennych i pochodne te są ciągłe.

Podobnie definiuje się pochodne cząstkowe dowolnego rzędu $m \geq 2$ i funkcje klasy C^m .

Twierdzenie 6. Jeśli $f: U \rightarrow \mathbb{R}^q$, gdzie $q \in \mathbb{N}$, jest funkcją klasy C^{m+2} , to dla każdego $x \in U$ i wszystkich $i, j \in \{1, \dots, p\}$ mamy

$$\delta_{ij}^2 f(x) = \delta_{ji}^2 f(x).$$

Uwaga 1. W przypadku, gdy funkcja f nie jest klasy C^2 , powyższa równość (równość drugich pochodnych „mieszanych”) może nie zachodzić.

Twierdzenie 7. Niech $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^2 , $x_0 \in U$ i niech

52.

$$\Delta_i := \det \begin{bmatrix} \partial_{11}^2 f(x_0) & \dots & \partial_{1i}^2 f(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{i1}^2 f(x_0) & \dots & \partial_{ii}^2 f(x_0) \end{bmatrix}, \quad i=1, \dots, p.$$

Założym, że

$$\partial_i f(x_0) = 0, \quad i=1, \dots, p.$$

(i) Jeśli funkcja f ma w punkcie x_0 minimum lokalne, to

$$\Delta_i \geq 0, \quad i=1, \dots, p.$$

(ii) Jeśli funkcja f ma w punkcie x_0 maksimum lokalne, to

$$(-1)^i \Delta_i \geq 0, \quad i=1, \dots, p.$$

(iii) Jeśli

$$\Delta_i > 0, \quad i=1, \dots, p,$$

to funkcja f ma w punkcie x_0 właściwe minimum lokalne: istnieje takie $R \in (0, +\infty)$, że

$$f(x) > f(x_0), \quad x \in K(x_0, R) \setminus \{x_0\}.$$

(iv) Jeśli

$$(-1)^i \Delta_i > 0, \quad i=1, \dots, p,$$

to funkcja f ma w punkcie x_0 właściwe maksimum lokalne: istnieje takie $R \in (0, +\infty)$, że

$$f(x) < f(x_0), \quad x \in K(x_0, R) \setminus \{x_0\}.$$

WNIOSEK 1. Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ funkcja klasy C^2 i niech $(x_0, y_0) \in U$. Założym, że

$$\partial_1 f(x_0, y_0) = 0 \text{ i } \partial_2 f(x_0, y_0) = 0.$$

(i) Jeśli

$$\det \begin{bmatrix} \partial_{11}^2 f(x_0, y_0) & \partial_{12}^2 f(x_0, y_0) \\ \partial_{21}^2 f(x_0, y_0) & \partial_{22}^2 f(x_0, y_0) \end{bmatrix} > 0,$$

to funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) właściwe ekstremum lokalne: minimum, gdy $\partial_{11}^2 f(x_0, y_0) > 0$, i maksimum, gdy $\partial_{11}^2 f(x_0, y_0) < 0$.

53.

(ii) JEŚLI

$$\text{DET} \begin{bmatrix} \partial_{11} f(x_0, y_0) & \partial_{12} f(x_0, y_0) \\ \partial_{21} f(x_0, y_0) & \partial_{22} f(x_0, y_0) \end{bmatrix} < 0,$$

TO FUNKCJA f NIE MA W PUNKCIE (x_0, y_0) EKSTREMUM LOKALNEGO.

PRZYKŁAD 1. FUNKCJA $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ O WZORZE

$$f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$$

JEST KLASY C^2 . PONADTO

$$\partial_1 f(x, y) = 6x^2 - 6x \quad \text{ i } \quad \partial_2 f(x, y) = 6y^2 + 6y$$

DLA KAŻDEGO PUNKTU $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, A ZATEM, NA PODSTAWIE WNIOSKU 1, FUNKCJA f MOŻE MIEĆ EKSTREMUM LOKALNE TYLKO W TAKIM PUNKCIE $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ŻE

$$6x^2 - 6x = 0 \quad \text{ i } \quad 6y^2 + 6y = 0,$$

CZLI

$$(x=0 \text{ lub } x=1) \quad \text{ i } \quad (y=0 \text{ lub } y=-1);$$

FUNKCJA f MOŻE WIEC MIEĆ EKSTREMUM LOKALNE TYLKO W PUNKTACH

$$(0, 0), (0, -1), (1, 0), (1, -1).$$

PONIEWAŻ

$$\Delta_1(x, y) = \partial_1 f(x, y) = 12x - 6,$$

WIEC

$$\begin{aligned} \Delta_2(x, y) &= \text{DET} \begin{bmatrix} \partial_{11} f(x, y) & \partial_{12} f(x, y) \\ \partial_{21} f(x, y) & \partial_{22} f(x, y) \end{bmatrix} = \\ &= \text{DET} \begin{bmatrix} 12x - 6 & 0 \\ 0 & 12y + 6 \end{bmatrix} = 36(2x - 1)(2y + 1) \end{aligned}$$

DLA KAŻDEGO PUNKTU $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, CZLI

$$\Delta_1(0, 0) = -6, \quad \Delta_2(0, 0) = -36;$$

$$\Delta_1(0, -1) = -6, \quad \Delta_2(0, -1) = 36;$$

$$\Delta_1(1, 0) = 6, \quad \Delta_2(1, 0) = 36;$$

$$\Delta_1(1, -1) = 6, \quad \Delta_2(1, -1) = -36.$$

NA PODSTAWIE WNIOSKU 1 STWIERDZAMY, ŻE

54.

W punkcie $(0,0)$ funkcja f nie ma ekstremum,

W punkcie $(0,-1)$ funkcja f ma maksimum lokalne,

W punkcie $(1,0)$ funkcja f ma minimum lokalne,

W punkcie $(1,-1)$ funkcja f nie ma ekstremum.

Reasumując: funkcja f ma ekstremum lokalne tylko w punktach $(0,-1)$ i $(1,0)$, przy czym w punkcie $(0,-1)$ ma właściwe maksimum lokalne, a w punkcie $(1,0)$ ma właściwe minimum lokalne.