

43.

Przykład 2.

$$\int_1^4 \ln x \, dx = \int_1^4 (x)' \ln x \, dx = 4 \ln 4 - 1 \cdot \ln 1 - \int_1^4 x \ln' x \, dx =$$

$$= 8 \ln 2 - \int_1^4 1 \, dx = 8 \ln 2 - (4-1) = 8 \ln 2 - 3.$$

WNIOSEK 2 (O CALKOWANIU PRZEZ PODSTAWIENIE). Niech $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, a $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, funkcją o ciągłej pochodnej. Załóżmy, że

$$\varphi(x) \in [a,b], \quad x \in [\alpha, \beta], \quad \text{oraz} \quad \varphi(\alpha) = a \quad \text{i} \quad \varphi(\beta) = b.$$

Wtedy

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt.$$

Przykład 3.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot t \, dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin' t}{\sin t} \, dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt,$$

gdzie $\varphi(t) = \sin t$, $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, oraz $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$. Zatem

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot t \, dt = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{1}{x} \, dx = \ln 1 - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2.$$

Obliczanie pola obszaru płaskiego. Niech $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ i $g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ będą takimi funkcjami ciągłymi, że $f(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in [a,b]$. Wtedy pole obszaru, ograniczonego wykresami funkcji f i g oraz prostymi o równaniach $x=a$ i $x=b$, wynosi

$$\int_a^b (g(x) - f(x)) \, dx.$$

1.06.21

Przykład 4 Obliczyć pole P obszaru ograniczonego wykresami funkcji $f: [0,3] \rightarrow \mathbb{R}$ i $g: [0,3] \rightarrow \mathbb{R}$ o wzorach

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 \quad \text{i} \quad g(x) = x^2 - 1$$

oraz prostymi o równaniach $x=0$ i $x=3$.Zauważmy, że dla każdego $x \in [0,3]$ mamy

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x + 1 = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

oraz

$$f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x \in [1,2].$$

43.
44.

ZADANIE

$$\begin{aligned}
 P &= \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx + \int_1^2 (g(x) - f(x)) dx + \int_2^3 (f(x) - g(x)) dx = \\
 &= \int_0^1 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx - \int_1^2 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx + \int_2^3 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx = \\
 &= [A(1) - A(0)] - [A(2) - A(1)] + [A(3) - A(2)],
 \end{aligned}$$

Gdzie

$$A(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x, \quad x \in \mathbb{R},$$

A więc

$$\begin{aligned}
 P &= \left(\frac{1}{4} \cdot 81 - \frac{2}{3} \cdot 27 - \frac{1}{2} \cdot 9 + 2 \cdot 3 \right) - 2 \left(\frac{1}{4} \cdot 16 - \frac{2}{3} \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 4 + 2 \cdot 2 \right) + \\
 &\quad + 2 \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - 0 = \\
 &= \frac{81}{4} - 18 - \frac{9}{2} + 6 - 8 + \frac{32}{3} + 4 - 8 + \frac{1}{2} - \frac{4}{3} - 1 + 4 = \\
 &= \frac{81}{4} + \frac{32}{3} - 25 = \frac{243}{12} + \frac{128}{12} - 25 = \frac{371}{12} - 25 = \frac{371 - 300}{12} = \frac{71}{12}.
 \end{aligned}$$

OBLICZANIE OBJĘTOŚCI PRZY OBROTACH. Niech $f: [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ będzie funkcją ciągłą. Objętość ciała V , powstałego przez obrót o 360° wokół osi Ox liniami funkcji f , wynosi

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Przykład 5. Niech $f = \sin$ na $[0, \pi]$. Wtedy objętość V określonej przy linii

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \\
 &= \pi \left[\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right) - \left(\frac{0}{2} - \frac{1}{4} \sin 0 \right) \right] = \frac{\pi^2}{2}.
 \end{aligned}$$

11. FUNKCJE WIELU ZMIENNYCH

DEFINICJA 1. (i) ZBIÓR

$$\mathbb{R}^p := \{ (x_1, \dots, x_p) : x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R} \}$$

NAZIWANY p -WYMIAROWĄ PRZESTRZENIĄ KARTESZJANSKĄ;

(ii) JEŚLI $(x_1, \dots, x_p), (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ I $\alpha \in \mathbb{R}$, TO

$$(x_1, \dots, x_p) + (y_1, \dots, y_p) := (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p)$$