PRZYKŁAD 11. Określmy funkcję $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ wzorem
$$f(x) = \sin\frac{1}{x}.$$
Wtedy $0 \in (\mathbb{R}\setminus\{0\})^d$: $1/n\pi \to 0$ i $1/(\frac{\pi}{2}+2n\pi) \to 0$. Ponieważ
$$f\left(\frac{1}{n\pi}\right) = \sin n\pi = 0 \to 0$$
oraz
$$f\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \to 1,$$
więc funkcja f nie ma granicy w zerze.

DEFINICJA 11. Niech $A \subset \mathbb{R}$ i $f: A \to \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 \in A$, gdy
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$
dla każdego zbieżnego do x_0 ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktów zbioru A. Funkcję f nazywamy ciągłą, gdy jest ciągła w każdym punkcie zbioru A.

TWIERDZENIE 7. Niech $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ i $x_0 \in A$.

Jeśli $x_0 \in A^d$, to funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$
Jeśli $x_0 \in A\setminus A^d$, to funkcja f jest ciągła w x_0.

PRZYKŁAD 12. Ponieważ $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2$, więc funkcja $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o wzorze
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{gdy } x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \\ c, & \text{gdy } x = 1, \end{cases}$$
jest ciągła w 1 wtedy i tylko wtedy, gdy $c = 2$.

TWIERDZENIE 8. Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem, a $f: I \to \mathbb{R}$ różnowartościową funkcją ciągłą. Wtedy funkcja f jest ściśle monotoniczna, $f(I)$ jest przedziałem i funkcja f^{-1} jest ciągła.

TWIERDZENIE 9. Niech $A, B \subset \mathbb{R}$, $f: A \to B$, $g: B \to \mathbb{R}$. Jeśli funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 \in A$, a funkcja g jest ciągła w punkcie $f(x_0)$, to funkcja $g\circ f$ jest ciągła w x_0.

Jeśli funkcje f i g są ciągłe, to funkcja $g\circ f$ jest ciągła.

TWIERDZENIE 10. NIECH $A \subset \mathbb{R}$, $f:A\to\mathbb{R}$ I $g:A\to\mathbb{R}$. JEŚLI FUNKCJE f I g SĄ CIĄGŁE W PUNKCIE $x_0\in A$ [CIĄGŁE], TO CIĄGŁE W PUNKCIE x_0 [CIĄGŁE] SĄ FUNKCJE $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ ORAZ, GDY $g(x)\neq 0$, $x\in A$, FUNKCJA $\frac{f}{g}$.

PRZYKŁAD 13. WIELOMIANY, FUNKCJE WYMIERNE, POTĘGOWE, TRYGONOMETRYCZNE, WYKŁADNICZE I LOGARYTMICZNE, A TAKŻE CYKLOMETRYCZNE SĄ FUNKCJAMI CIĄGŁYMI.

TWIERDZENIE 11 (DARBOUX). JEŚLI I JEST PRZEDZIAŁEM, A $f:I\to\mathbb{R}$ FUNKCJĄ CIĄGŁĄ, TO KAŻDA LICZBA LEŻĄCA MIĘDZY DWOMA WARTOŚCIAMI FUNKCJI f JEST TAKŻE JEJ WARTOŚCIĄ:

$$\bigwedge_{a,b\in I}\ \bigwedge_{y\in\mathbb{R}} \left(f(a)\le y\le f(b) \Rightarrow \bigvee_{x\in I} y=f(x)\right).$$

PRZYKŁAD 14. BADAMY ISTNIENIE ROZWIĄZAŃ RÓWNANIA

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = x$$

OKREŚLMY FUNKCJĘ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ WZOREM $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x - x$. FUNKCJA f JEST CIĄGŁA, $f(0)=1$ I $f(1)=-\frac{1}{2}$. ISTNIEJE WIĘC TAKIE $x\in(0,1)$, ŻE $f(x)=0$, CZYLI $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x$.

6. ELEMENTY MATEMATYKI FINANSOWEJ

WYSOKOŚĆ ODSETEK OD KREDYTU ZA USTALONY OKRES KREDYTOWANIA WYRAŻA SIĘ JAKO PROCENT OD POŻYCZONEJ KWOTY. PROCENT TEN NAZYWAMY STOPĄ PROCENTOWĄ KREDYTU LUB JEGO OPROCENTOWANIEM. OZNACZMY PRZEZ P KWOTĘ KREDYTU, PRZEZ i STOPĘ PROCENTOWĄ KREDYTU W USTALONYM OKRESIE, A PRZEZ I WYSOKOŚĆ ODSETEK W TYM OKRESIE. WTEDY

$$I=P\cdot i.$$

PONIEWAŻ KWOTA ZWROTU K JEST SUMĄ KWOTY KREDYTU I ODSETEK OD KREDYTU, WIĘC

$$K=P+I=P(1+i).$$

W PRAKTYCE BANKOWEJ ZWYKLE STOSUJE SIĘ ROCZNĄ STOPĘ PROCENTOWĄ. PONIEWAŻ JEDNAK ODSETKI, PODOBNIE JAK RATY KREDYTU, PŁACIĆ TRZEBA CZĘŚCIEJ, NA PRZYKŁAD CO MIESIĄC, WIĘC FAKTYCZNĄ STOPĘ PROCENTOWĄ ZA OKRES t DNI WYZNACZONY KOLEJNYMI DATAMI PŁATNOŚCI ODSETEK OBLICZAMY PRZY POMOCY WZORU

$$i=\frac{t}{360}R,$$

GDZIE R OZNACZA ROCZNĄ STOPĘ PROCENTOWĄ (W rozliczeniach finansowych przyjmuje się, że rok ma 360, a miesiąc 30 dni). Wtedy

$$I = P\cdot R\cdot \frac{t}{360}.$$

Przykład 1. Pożyczam od banku 20 tysięcy złotych, a po 4 miesiącach muszę zwrócić 22 tysiące. Ile wynosi roczna stopa procentowa kredytu?

Ponieważ $P=20\,000$, $K=22\,000$ i $t=120$, więc

$$I = K-P = 2000,$$

skąd

$$2000 = 20000\cdot R\cdot \frac{120}{360},$$

czyli

$$R = \frac{2000\cdot 3}{20000} = 0{,}3 = 30\%.$$

Odsetki od lokaty naliczane są na ogół w kolejnych okresach bazowych tej samej długości, na przykład co miesiąc lub po upływie okresu lokaty. Jeśli w każdym okresie bazowym odsetki naliczane są od tej samej podstawy, równej początkowej kwocie lokaty, to mamy do czynienia z tak zwanym oprocentowaniem prostym. Jeśli natomiast po każdym okresie bazowym podstawa lokata zostaje powiększona o odsetki, to mówimy o oprocentowaniu składanym. Samo dopisywanie odsetek do bazy lokaty nazywamy ich kapitalizowaniem. Wprowadźmy oznaczenia:

- P – początkowa kwota lokaty,
- i – oprocentowanie za okres bazowy,
- n – liczba okresów bazowych,
- I – całkowite odsetki,
- K – końcowa wartość lokaty.

W przypadku oprocentowania prostego

$$I = P\cdot i\cdot n \quad \text{i} \quad K = P(1+ni),$$

a w przypadku oprocentowania składanego

$$K = P(1+i)^n \quad \text{i} \quad I = P[(1+i)^n - 1].$$

Przykład 2. Bank nalicza odsetki tylko na koniec okresu trwania lokaty. Złożono 1500 zł