

Przykładowy egzamin z analizy matematycznej 1

32 – 35	bardzo dobry
29 – 31	dobry plus
25 – 28	dobry
22 – 24	dostateczny plus
18 – 21	dostateczny
–17	niedostateczny

1. Sformułuj pewnik Archimedesesa. 1p.
2. Co oznacza fraza "zbiór \mathbb{Q} jest gęsty w zbiorze \mathbb{R} "? 1p.
3. Wskaż kresy zbioru $\left\{ \frac{2m}{3n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, m < 2n \right\}$. Uzasadnij swój wybór. 2p.
4. Wyznacz wszystkie pierwiastki zespolone stopnia 6 z jednościami. Zrób odpowiedni rysunek. 2p.

5. Wymień związki pomiędzy ograniczonością, warunkiem Cauchy'ego i zbieżnością ciągu liczbowego. 2p.

6. Wiedząc, że $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$. 1p.

7. Czy z tego, że ciągi $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mają granice i $x_n < y_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wynika nierówność $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n < \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$? Odpowiedź uzasadnij, dowodząc odpowiedniego twierdzenia lub podając stosowny przykład. 2p.

8. Podaj przykład szeregu, który ma sumę i nie jest zbieżny i przykład szeregu, który nie ma sumy. 2p.

9. Co gwarantuje zbieżność iloczynu Cauchy'ego szeregów, a co jego zbieżność bezwarunkową? 2p.
10. Które ciągi liczbowe, a więc funkcje $c: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, są ciągłe? Odpowiedź uzasadnij. 1p.
11. Podaj przykład funkcji, która ma granicę w pewnym punkcie, ale nie jest ciągła w tym punkcie, a następnie przykład funkcji ciągłej w punkcie, w którym nie ma granicy. 2p.
12. Uzasadnij, że równanie $\ln x + x = 0$ ma w przedziale $(0, 1)$ dokładnie jedno rozwiązanie. 3p.
13. Co oznacza, że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ma w $-\infty$ granicę ∞ ? 1p.

14. Znajdź granicę ciągu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie $f_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją o wzorze

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & \text{gdy } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right), \\ 0, & \text{gdy } x \in \left[\frac{1}{n}, \infty\right). \end{cases}$$

Czy zbieżność jest jednostajna? 2p.

15. Z czego wynika, że w kole zbieżności suma szeregu potęgowego jest funkcją ciągłą? 3p.

16. Wiedząc, że $\sin' = \cos$ znajdź pochodną funkcji arcsin w dowolnym punkcie przedziału $(-1, 1)$. 3p.

17. Niech $-\infty < a < b < \infty$. Wyznacz wszystkie punkty ξ spełniające tezę twierdzenia Lagrange'a dla funkcji $[a, b] \ni x \mapsto x^2$. 2p.

18. Czy można stosować tezę twierdzenia de L'Hospitala do obliczania granicy $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$?
Oblicz tę granicę. 3p.