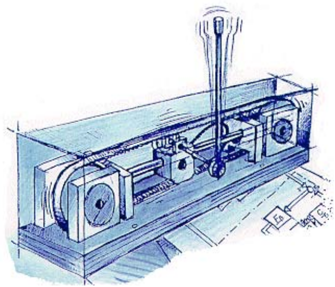
Automatyka i robotyka

Wykład 4 - Układy pierwszego i drugiego rzędu



Wojciech Paszke

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych,
Uniwersytet Zielonogórski

Plan wykładu

Wprowadzenie

Układ pierwszego rzędu

Układ drugiego rzędu

Plan wykładu

Wprowadzenie

Układ pierwszego rzędu

Układ drugiego rzędu

Plan wykładu

Wprowadzenie

Układ pierwszego rzędu

Układ drugiego rzędu

Zera i bieguny układu

Zera

Wartości zmiennej Laplace'a s które powodują, że transmitacja $G(s) = 0$ oraz wszystkie pierwiastki licznika równe pierwiastkom mianownika transmitancji operatorowej.

Bieguny

Wartości zmiennej Laplace'a s które powodują, że transmitacja $G(s) = \infty$ oraz wszystkie pierwiastki mianownika równe pierwiastkom licznika transmitancji operatorowej.

Odpowiedź wymuszona i naturalna układu

Odpowiedź układu na wymuszenie

Odpowiedź każdego układu ($y(t)$ lub $Y(s)$) na zadane wymuszenie jest sumą odpowiedzi wymuszonej i naturalnej układu

Przykład

Rozważmy odpowiedź układu o transmitancji

$$G(s) = \frac{(s+2)}{(s+5)}$$

na wymuszenie (pobudzenie) skokiem jednostkowym ($R(s) = \frac{1}{s}$).

Odpowiedź wymuszona i naturalna układu

Dokonujemy rozkładu na ułamki proste odpowiedzi układu

$$Y(s) = \frac{(s+2)}{s(s+5)} = \frac{2/5}{s} + \frac{3/5}{s+5}$$

i wyznaczamy oryginał w dziedzinie czasu

$$y(t) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}e^{-5t}$$

Wiemy też, że

- biegun układu to $s = -5$
- biegun sygnału wejściowego to $s = 0$
- zero układu to $s = -2$

Odpowiedź wymuszona i naturalna układu

Odpowiedź układu to

$$y(t) = \underbrace{\frac{2}{5}}_{\text{odpowiedź wymuszona}} + \underbrace{\frac{3}{5}e^{-5t}}_{\text{odpowiedź naturalna}}$$

Wnioski

- biegun sygnału wejściowego ($s = 0$) generuje odpowiedź wymuszoną układu
- biegun układu generuje odpowiedź naturalną układu

Odpowiedź wymuszona i naturalna układu

Wnioski (cd.)

- zera i bieguny mają wpływ na amplitudy odpowiedzi naturalnej i wymuszonej (wartości $\frac{2}{5}$ oraz $\frac{3}{5}$ wyznaczone podczas rozkładu na ułamki proste).
- biegun układu (czyli $s = -5$) generuje wykładniczą odpowiedź postaci e^{-st}. Dlatego dla $s \to -\infty$ odpowiedź szybciej będzie dążyć do wartości 0.

Układ pierwszego rzędu

$$G(s) = \frac{a}{s+a}$$

Własności:

- Jeden biegun w $(-a)$
- Pasmo przenoszenia $\omega_{\mathrm{BW}} = |a|$
- Odpowiedź skokowa

$$Y(s) = \frac{1}{s}\frac{a}{s+a} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}$$

$$y(t) = (1 - e^{-at})u(t)$$

Układ pierwszego rzędu

Znaczenie parametru a

$$\text{Dla t} = \frac{1}{\text{a}} \ \ e^{-at}\Big|_{t=\frac{1}{a}} = e^{-1} \simeq 0.37$$

lub

$$y(t)|_{t=\frac{1}{a}} = 1 - \ e^{-at}\Big|_{t=\frac{1}{a}} = 1 - 0.37 = 0.67$$

Stała czasowa układu pierwszego rzędu $\tau = \frac{1}{a}$

$$G(s) = \frac{a}{s+a} = \frac{1}{\frac{1}{a}s+1} = \frac{1}{\tau s+1}$$

Układ pierwszego rzędu

Podstawowe wskaźniki jakościowe

- Czas narastania - T_r - czas potrzebny do wzrostu sygnału wyjściowego od 0.1 do 0.9 wartości końcowej

$$T_r = \frac{2.31}{a} - \frac{0.11}{a} = \frac{2.2}{a}$$

- Czas ustalania (regulacji) - T_s - czas potrzebny do osiągnięcia i pozostania w przedziale od 98% do 102% wartości końcowej

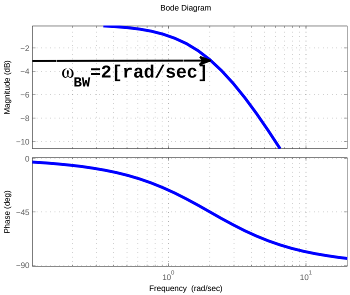
$$T_s = \frac{4}{a}$$

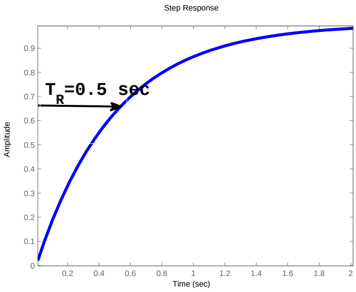
Układ pierwszego rzędu

Odpowiedź częstotliwościowa i skokowa

Przykładowa transmitancja

$$G(s) = \frac{2}{s+2}$$





Identyfikacja układów 1-ego rzędu

Fakty

- Trudności z analitycznym wyznaczeniem transmitancji układów rzeczywistych.
- Na podstawie odpowiedzi skokowej możemy wyznaczyć wzmocnienie (K) i stałą czasową ($\tau = \frac{1}{a}$). Dla układu o transmitacji

$$G(s) = \frac{K}{s+a}$$

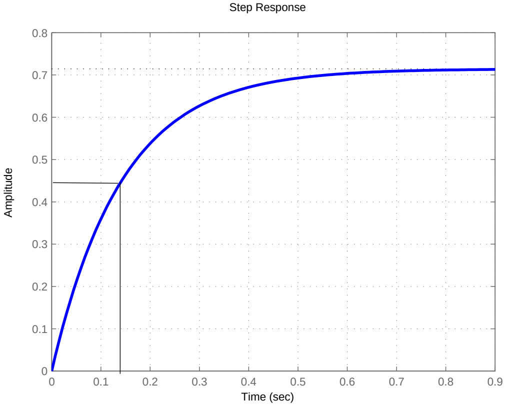
odpowiedź skokowa to

$$Y(s) = \frac{K}{s(s+a)} = \frac{\frac{K}{a}}{s} - \frac{\frac{K}{a}}{(s+a)}$$

i możemy na podstawie wykresu wyznaczyć K i a

Identyfikacja układów 1-ego rzędu

Przykładowa odpowiedź układu



Identyfikacja układów 1-ego rzędu

Wyznaczenie wzmocnienia i stałej czasowej

- Wartość końcowa to 0.72. Czyli $0.63 \cdot 0.72 = 0.45$ jest osiągane po $t = 0.13[sec]$ Dlatego

$$a = \frac{1}{0.13} \simeq 7.7$$

- Wiemy, że

$$\frac{K}{a} = 0.72 \text{ czyli } K = 5.54$$

  czyli wykres jest dla układu $G(s) = \frac{5.5}{s+7.7}$

Przykład został wygenerowany dla $G(s) = \frac{5}{s+7}$

Układu 2-ego rzędu

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2} = \frac{k}{(s+\sigma)^2 + \omega_d^2}$$

gdzie

- ω_n - pulsacja drgań własnych
- ζ - współczynnik tłumienia
- σ - tłumienie względne
- ω_d - pulsacja drgań tłumionych

Układ drugiego rzędu

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

gdzie

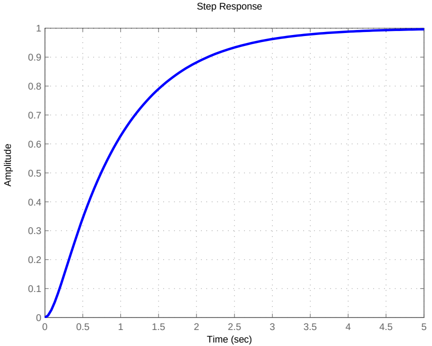
- ζ - współ. tłumienia względnego
- ω_n - pulsacja drgań własnych (nietłumionych)
- lokalizacja biegunów

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

  - dla $\zeta > 1$ oba bieguny są rzeczywiste
  - dla $\zeta = 1$ oba bieguny są identyczne i rzeczywiste
  - dla $0 < \zeta < 1$ bieguny są zespolone i sprzężone.
  - dla $\zeta = 0$ bieguny są urojone i sprzężone.

Układ drugiego rzędu

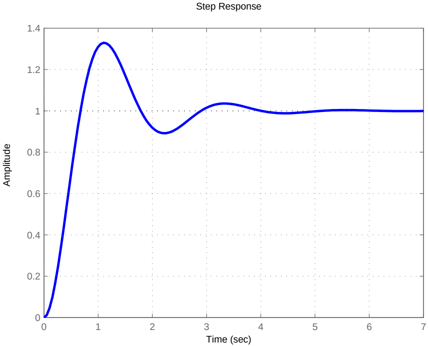
Odpowiedź przetłumiona (ang. overdamped) - $\zeta > 1$



$$G(s) = \frac{9}{s^2 + 9s + 9},\ s_1 = -7.854,\ s_2 = -1.146$$

Układ drugiego rzędu

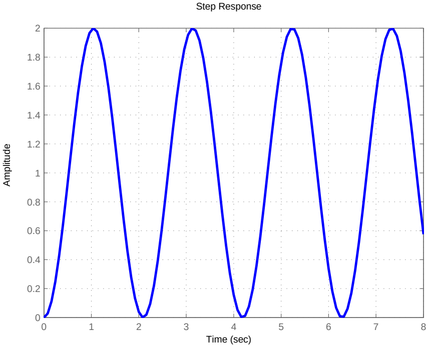
Odpowiedź tłumiona (ang. underdamped) - $0 < \zeta < 1$



$$G(s) = \frac{9}{s^2 + 2s + 9}, \; s_1 = -1 + j\sqrt{8}, \; s_2 = -1 - j\sqrt{8}$$

Układ drugiego rzędu

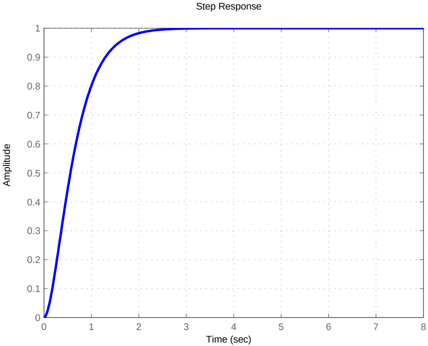
Odpowiedź niettłumiona (ang. undamped) - $\zeta = 0$



$$G(s) = \frac{9}{s^2 + 9}, \; s_1 = j3, \; s_2 = -j3$$

Układ drugiego rzędu

Odpowiedź krytycznie tłumiona (ang. critically damped) - $\zeta = 1$



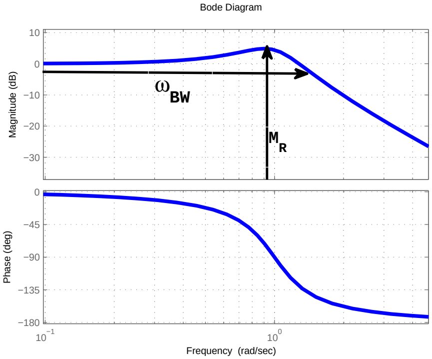
$$G(s) = \frac{9}{s^2 + 6s + 9}, \; s_1 = -3, \; s_2 = -3$$

Układ drugiego rzędu

Odpowiedź częstotliwościowa

Przykładowa transmitancja

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.6s + 1}$$



Układ drugiego rzędu

Własności układu

- pulsacja rezonansowa (dla $\zeta \;\; \frac{1}{\sqrt{2}}$)

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}$$

- Moduł rezonansowy (dla $\zeta \;\; \frac{1}{\sqrt{2}}$)

$$M_R = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

- pasmo przenoszenia

$$\omega_{BW} = \omega_n \sqrt{(1-2\zeta^2)+\sqrt{4\zeta^4-4\zeta^2+2}}$$

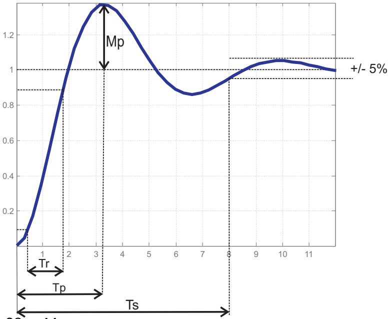
Dla $0 < \zeta < 1$ to $0.64\omega_n < \omega_{BW} < 1.55\omega_n$. Dla $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ to $\omega_{BW} = \omega_n$.

Układ drugiego rzędu

Odpowiedź skokowa

Przykładowa transmitancja

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.6s + 1}$$



- M_P - wartość (moduł) przeregulowania

  $$POS = 100[(M_P - y(\infty))/y(\infty)]$$

- T_P - czas max. przeregulowania
- T_S - czas regulacji
- T_R - czas narastania

Układ drugiego rzędu

Odpowiedź skokowa (dziedzina częstotliwości)

$$Y(s) = \frac{1}{s}G(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)}$$

Odpowiedź skokowa (dziedzina czasu)

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-t/\tau}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos(\omega_d t - \varphi_d), \quad t > 0$$

gdzie

- $|\sigma| = \zeta\omega_n$ - tłumienie względne
- $\tau = 1/|\sigma|$ - stała czasowa
- $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ - pulsacja tłumiona
- $\varphi = \sin^{-1}\zeta$

Układ drugiego rzędu

Wyznaczenie wartości T_p

Szukamy 1-ego maksimum dla $\dot{y}(t) = 0$, gdzie

$$\dot{y}(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t)$$

$$\dot{y}(t) = 0 \Leftrightarrow \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t = n\pi \Rightarrow t = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

Ostatecznie szukamy 1-ego maksimum, czyli $n = 1$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

Układ drugiego rzędu

Wyznaczenie wartości *POS*

Korzystamy ze wzoru na odpowiedź skokową i dlatego

$$POS = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \cdot 100$$

Równocześnie możemy wyznaczyć wzór na ζ

$$\zeta = \frac{-\ln(POS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(POS/100)}}$$

Układ drugiego rzędu

Wyznaczenie wartości T_s dla poziomu $\pm 2\%$

Korzystamy z poniższego wzoru

$$e^{-\zeta \omega_n t} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.02$$

Rozwiązanie to

$$T_s = \frac{-\ln(0.02)\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta \omega_n}$$

Ponieważ $-\ln(0.02)\sqrt{1-\zeta^2} \simeq 4$ dla $0\zeta < 0.9$ to

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n}$$

Układ drugiego rzędu

Wyznaczenie wartości T_r

Zostało dowiedzione, że

$$\omega_n T_r \simeq 1.76\zeta^3 - 0.417\zeta^2 + 1.039\zeta + 1$$

przy błędzie 0.5% dla $0 < \zeta < 0.9$ i jednocześnie

$$\zeta \simeq 0.115(\omega_n T_r)^3 - 0.883(\omega_n T_r)^2 + 2.504(\omega_n T_r) - 1.738$$

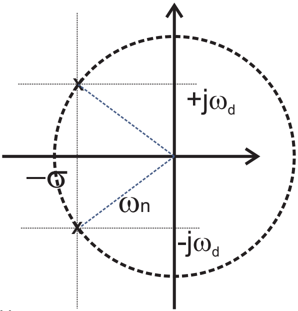
przy błedzie 5% dla $0 < \zeta < 0.9$.

Układ drugiego rzędu

Wpływ zmian położenia biegunów

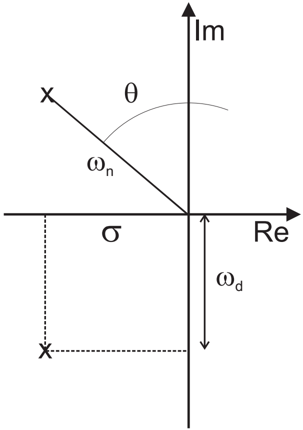
Dla danej transmitancji

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_d^2 + \sigma^2}{s^2 + 2\sigma s + \omega_d^2 + \sigma^2}$$



- $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$
- $\theta = \cos^{-1}\zeta$
- $\zeta = \cos\theta$

Układu 2-ego rzędu



$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}$$

$$\sigma = \zeta\omega_n$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\theta = \sin^{-1}\zeta$$

czyli

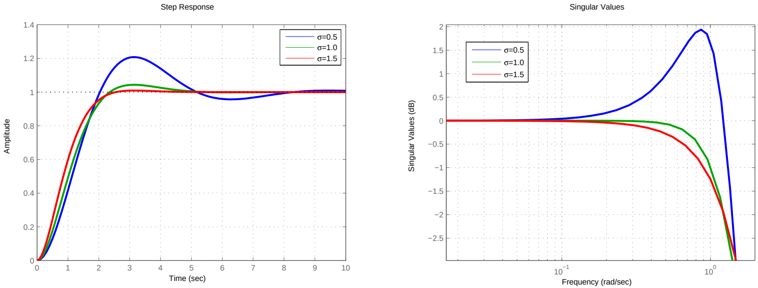
$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{\sigma}$$

Układ drugiego rzędu

Wpływ zmian σ

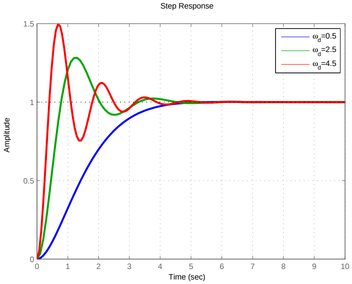
$$\omega_d = 1,\ \sigma = \{0.5, 1, 1.5\}$$

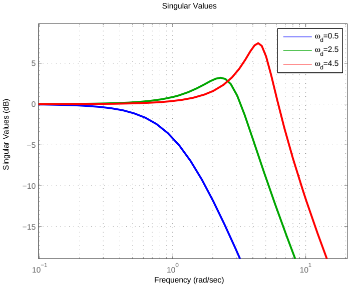


Układ drugiego rzędu

Wpływ zmian ω_d

$$\sigma = 1,\ \omega_d = \{0.5, 2.5, 4.5\}$$

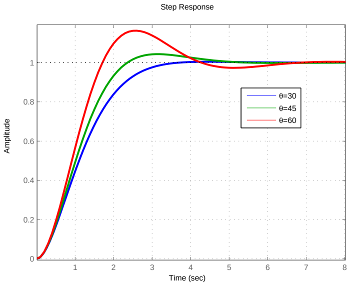


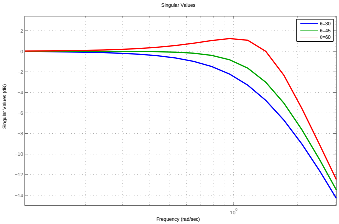


Układ drugiego rzędu

Wpływ zmian ζ

$$\omega_n = \sqrt{2},\ \theta = \{30, 45, 60\}$$

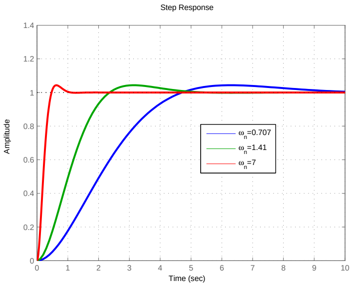


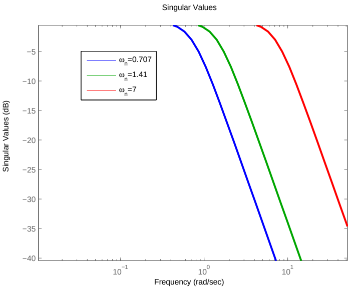


Układ drugiego rzędu

Wpływ zmian ω_n

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \omega_n = \{\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, 5\sqrt{2}\}$$





Układ drugiego rzędu

Problem: Znane jest położenie biegunów układu $s_{1,2} = -3 \pm j7$.
Wyznacz ζ, ω_n, T_p, T_r oraz POS.
Rozwiązanie:

- współczynnik tłumienia ζ

$$\zeta = cos\theta = cos(arctan(\frac{7}{3})) = 0.394$$

- pulsacja drgań własnych ω_n

$$\omega_n = \sqrt{7^2 + 3^2} = 7.616$$

Układ drugiego rzędu

- czas T_p

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{7} = 0.449[sec]$$

- Przeregulowanie POS

$$POS = e^{-(\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}})} \cdot 100 = 26$$

- czas T_s

$$T_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{3} = 1.333[sec]$$

Układ drugiego rzędu

Problem: Znaleźć ζ, ω_n, T_s, T_p, T_r i POS dla układu

$$G(s) = \frac{361}{s^2 + 16s + 361}$$

Odpowiedź: Wykonaj wymagane obliczenia i uzyskaj $\zeta = 0.421$, $\omega_n = 19$, $T_s = 0.5$, $T_p = 0.182$, $T_r = 0.079$ i $POS = 23.3$

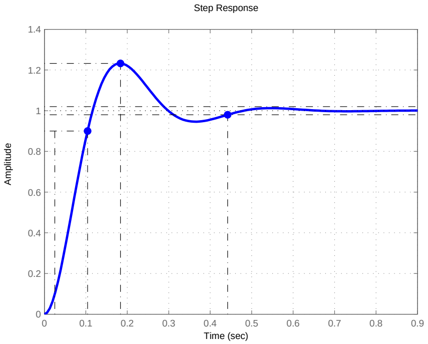
Układ drugiego rzędu

Kod programu `numg=361;`

```
deng=[1 16 361];
omegan=sqrt(deng(3)/deng(1))
zeta=(deng(2)/deng(1))/(2*omegan)
Ts=4/(zeta*omegan)
Tp=pi/(omegan*sqrt(1-zeta^2))
pos=100*exp(-zeta*pi/sqrt(1-zeta^2))
Tr=(1.768*zeta^3-0.417*zeta^2+1.039*zeta+1)/omegan
```

Układ drugiego rzędu

Odpowiedź skokowa układu



Układ drugiego rzędu

Wpływ dodatkowych biegunów układu

Zakładając występowanie dodatkowego bieguna $s_3 = -\alpha$ ($s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$) to odpowiedź układu będzie

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B(s+\zeta\omega_n) + C\omega_d}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} + \frac{D}{s+\alpha}$$

czyli

$$y(t) = Au(t) + e^{-\zeta\omega_n t}(B\cos(\omega_d t) + C\sin(\omega_d t)) + De^{-\alpha t}$$

Układ drugiego rzędu

Wpływ dodatkowych biegunów układu

Musimy rozpatrzyć 3 przypadki

- $\alpha \simeq \zeta\omega_n$ - musimy rozważać układ jako układ 3-ego rzędu.
- $\alpha \gg \zeta\omega_n$ - możemy przybliżyć dynamikę układu dynamiką układu drugiego rzędu.
- $\alpha = \infty$ - otrzymujemy 'czysty' układ drugiego rzędu

Układ drugiego rzędu

Odpowiedź układu z zerami

Zakładamy istnienie zer transmitancji, czyli

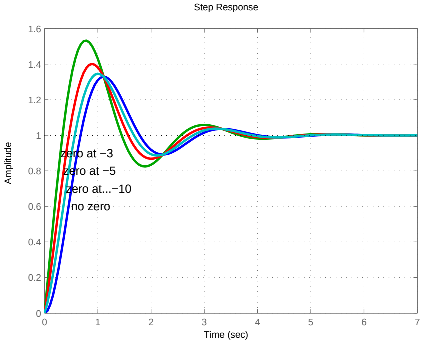
$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{(s+a)}{(s+b)(s+c)} = \frac{A}{s+b} + \frac{B}{s+c} \\
&= \frac{(-b+a)/(-b+c)}{s+b} + \frac{(-c+a)/(-c+b)}{s+c}
\end{aligned}
$$

Jeśli $a \gg b$ i $a \gg c$ to

$$
\begin{aligned}
G(s) &\approx a\left[\frac{1/(-b+c)}{s+b} + \frac{1/(-c+b)}{s+c}\right] \\
&= \frac{a}{(s+b)(s+c)}
\end{aligned}
$$

Odpowiedź układu z zerami

Odpowiedź układu $G(s) = \frac{L(s)}{s^2+2s+9}$



Odpowiedź układu z zerami

Ogólnie, odpowiedź układu z zerami transmitacji możemy zapisać jako $Y(s) = (s+a)G(s)$ gdy $G(s)$ nie ma zer. Czyli mamy

$$(s+a)Y(s) = sY(s) + aY(s)$$

Mamy dwa przypadki

- dla $a >> 1$ to $(s+a)Y(s) \simeq aY(s)$
- dla $a \simeq 1$ to $(s+a)Y(s) \simeq sY(s)$