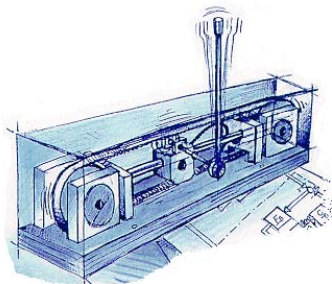


Automatyka i robotyka

Wykład 6 - Odpowiedź częstotliwościowa



Wojciech Paszke

Instytut Sterowania i Systemów
Informatycznych,
Uniwersytet Zielonogórski



Plan wykładu

Wprowadzenie

Podstawowe człony dynamiczne

Kształtowanie charakterystyki częstotliwościowej

Pasma przenoszenia



Plan wykładu

Wprowadzenie

Podstawowe człony dynamiczne

Kształtowanie charakterystyki częstotliwościowej

Pasma przenoszenia



Plan wykładu

Wprowadzenie

Podstawowe człony dynamiczne

Kształtowanie charakterystyki częstotliwościowej

Pasma przenoszenia



Plan wykładu

Wprowadzenie

Podstawowe człony dynamiczne

Kształtowanie charakterystyki częstotliwościowej

Pasma przenoszenia



Koncepcja odpowiedzi częstotliwościowej

Fakt

W stanie ustalonym, sinusoidalny sygnał wejściowy układu liniowego generuje odpowiedź sinusoidalną o tej samej częstotliwości ale o innej amplitudzie i przesunięciu fazowym. Zmiana amplitudy i fazy zależy od częstotliwości

Odpowiedź częstotliwościowa - wyrażenie analityczne

$$G(j\omega) = G(s)|_{s \rightarrow j\omega}$$



Koncepcja odpowiedzi częstotliwościowej

Dla układu

$$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)} \text{ mamy } G(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{M(j\omega)} = |G(j\omega)| \angle G(j\omega)$$

gdzie

$$|G(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|M(j\omega)|} = \frac{\sqrt{\operatorname{Re}(L(j\omega))^2 + \operatorname{Im}(L(j\omega))^2}}{\sqrt{\operatorname{Re}(M(j\omega))^2 + \operatorname{Im}(M(j\omega))^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle L(j\omega) - \angle M(j\omega) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{Im}(L(j\omega))}{\operatorname{Re}(L(j\omega))} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{Im}(M(j\omega))}{\operatorname{Re}(M(j\omega))} \right)$$



Odpowiedź częstotliwościowa

Przykład

Narysuj charakterystykę częstotliwościową układu

$$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{s+5}{s+10} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{j\omega+5}{j\omega+10}$$

Wyznaczamy moduł i przesunięcie fazowe

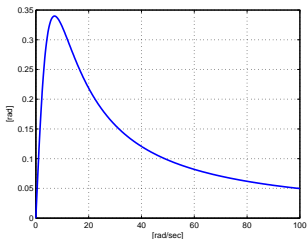
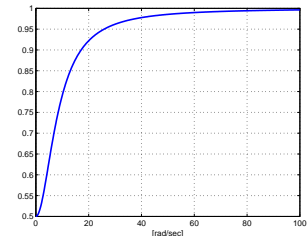
$$|G(j\omega)| = \frac{|L(\omega)|}{|M(j\omega)|} = \frac{\sqrt{\omega^2 + 25}}{\sqrt{\omega^2 + 100}}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle L(j\omega) - \angle M(j\omega) = \arctg\left(\frac{\omega}{5}\right) - \arctg\left(\frac{\omega}{10}\right)$$



Odpowiedź częstotliwościowa

Przykład



skrypt Matlab'a

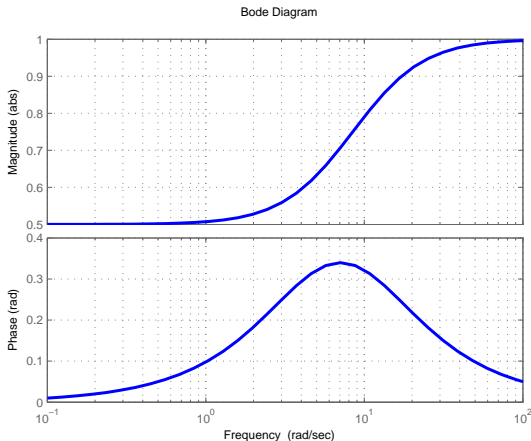
```
w=0:0.2:100;  
s=tf('s');  
sys=(s+5)/(s+10)  
y=freqresp(sys,w);  
plot(w,squeeze(abs(y)))  
plot(w,squeeze(angle(y)))
```



Odpowiedź częstotliwościowa

Przykład

Wykres Bode'go (polecenie `bode(sys)` w MATLAB'ie)





Odpowiedź częstotliwościowa

Dla dowolnej transmitancji $G(s)$ posiadającej m zer i n biegunów mamy

$$G(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_{m-1})(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_{n-1})(s - p_n)}$$

i dlatego

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= K \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \dots (j\omega - z_{m-1})(j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_{n-1})(j\omega - p_n)} \\ &= K(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \dots (j\omega - z_{m-1})(j\omega - z_m) \\ &\quad \times \frac{1}{(j\omega - p_1)} \frac{1}{(j\omega - p_2)} \dots \frac{1}{(j\omega - p_{n-1})} \frac{1}{(j\omega - p_n)} \end{aligned}$$



Odpowiedź częstotliwościowa

Dla wysokich częstotliwości $\omega \rightarrow \infty$ możemy na podstawie liczby zer (m) i biegunów (n) wyznaczyć końcowe wzmocnienie

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = K \frac{1}{\omega^{n-m}}$$

oraz przesunięcie fazowe

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle G(j\omega) = -(n-m) \frac{\pi}{2}$$



Skala [dB]

Określenie stosunku dwóch poziomów mocy - jednostka [Bel] zbyt duża w praktyce dlatego używamy [dB]

$$Q = \log_{10} \left(\frac{P_{wy}}{P_{we}} \right) [\text{Bel}] = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{wy}}{P_{we}} \right) [\text{dB}]$$

Ponieważ moc sygnału jest proporcjonalna do $()^2$ amplitudy sygnału to

$$Q = 10 \log_{10} \left(\frac{A_{wy}}{A_{we}} \right)^2 = 20 \log_{10} \left(\frac{A_{wy}}{A_{we}} \right) [\text{dB}]$$



Skala [dB]

[dB]	stosunek mocy	stosunek amplitud
-40	0.0001	0.01
-20	0.010	0.1
-10	0.1	0.3162
-6	0.25	0.5
-3	0.5	0.7071
0	1.0	1.0
3	2.0	1.414
6	4.0	2.0
10	10.0	3.162
20	100.0	10.0
40	10000.0	100.0



Skala [dB]

Dla transmitancji $G(s)$ mamy

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} \frac{|Y(j\omega)|}{|U(j\omega)|}$$

oraz

$$\angle G(j\omega) = \angle Y(j\omega) - \angle U(j\omega)$$

Najważniejsza właściwość

$$\begin{aligned} 20 \log_{10} |G_1(j\omega)G_2(j\omega)/G_3(j\omega)| &= 20 \log_{10} |G_2(j\omega)| + 20 \log_{10} |G_1(j\omega)| \\ &\quad - 20 \log_{10} |G_3(j\omega)| \\ \angle G_1(j\omega)G_2(j\omega)/G_3(j\omega) &= \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega) - \angle G_3(j\omega) \end{aligned}$$



Podstawowe człony dynamiczne

Człon całkujący

Transmitancja

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

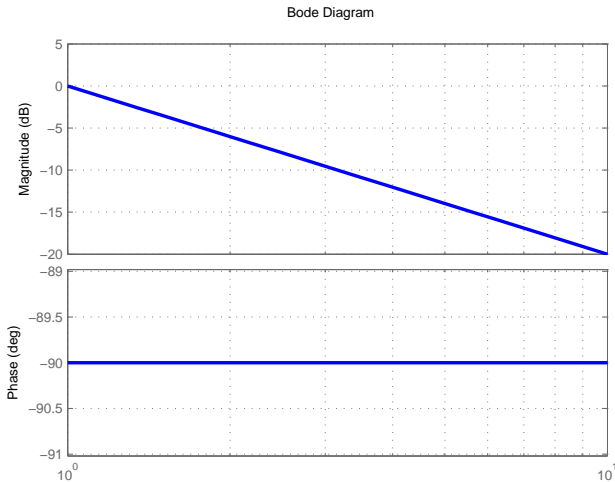
Odpowiedź częstotliwościowa

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega}, \quad \angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2} \text{ lub } -90^\circ$$



Podstawowe człony dynamiczne

Człon całkujący





Podstawowe człony dynamiczne

Człon inercyjny

Transmitancja członu inercyjnego

$$G(s) = \frac{1}{s+a} = \frac{1}{a\left(\frac{s}{a} + 1\right)}$$

(LF) Dla $s \simeq 0$ mamy $20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10}(1/a)$

(MF) Punkt przegięcia dla $s = a$ [rad/sec]

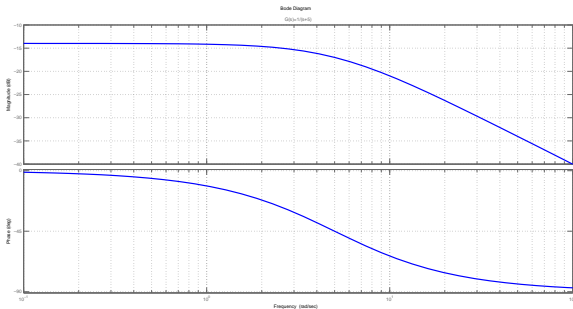
(HF) Dla $s \rightarrow \infty$ mamy

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} \frac{1}{a} - 20 \log_{10} \frac{\omega}{a} \simeq -20 \log_{10} \omega$$
$$\angle G(j\omega) = -90^\circ$$



Podstawowe człony dynamiczne

Człon inercyjny





Podstawowe człony dynamiczne

Człon różniczkujący

Transmitancja

$$G(s) = s$$

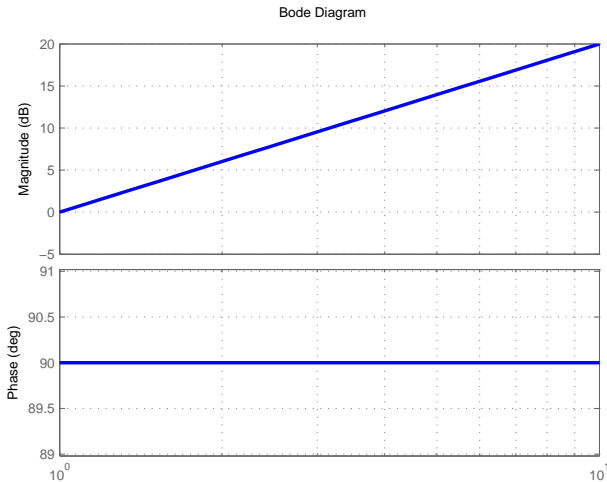
Odpowiedź częstotliwościowa

$$|G(j\omega)| = \omega, \quad \angle G(j\omega) = \frac{\pi}{2} \text{ lub } +90^\circ$$



Podstawowe człony dynamiczne

Człon różniczkujący





Podstawowe człony dynamiczne

Rzeczywiste zero

Transmitancja układu to

$$G(s) = (s + a) = a \left(\frac{s}{a} + 1 \right)$$

(LF) Dla $s \simeq 0$ mamy $20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10}(a)$

(MF) Punkt przegięcia dla $s = a$ [rad/sec]

(HF) Dla $s \rightarrow \infty$ mamy

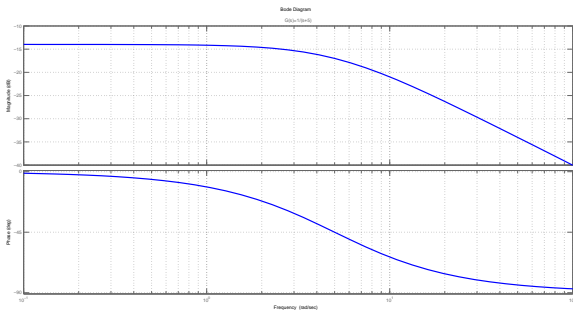
$$20 \log_{10} |M(j\omega)| = 20 \log_{10} a + 20 \log_{10} \frac{\omega}{a} \simeq 20 \log_{10} \omega$$

$$\angle G(j\omega) = 90^\circ$$



Podstawowe człony dynamiczne

Rzeczywiste zero





Podstawowe człony dynamiczne

Człon 2-ego rzędu

Transmitancja członu to

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{\omega_n^2 \left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1 \right)}$$

(LF) Dla $s \simeq 0$ mamy $20 \log_{10} |G(j\omega)| = -20 \log_{10} \omega^2$

(MF) Punkt przegięcia dla $s = \omega_n$ [rad/sec]

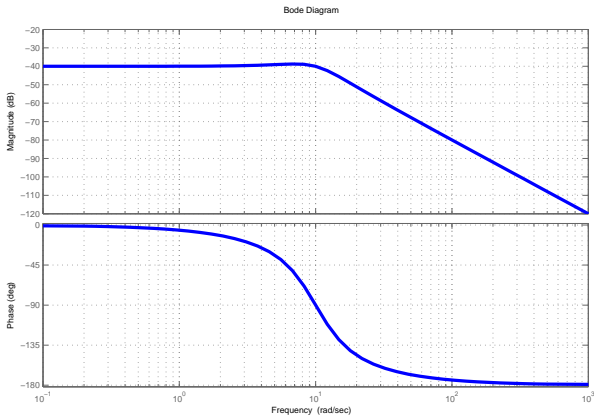
(HF) Dla $s \rightarrow \infty$ mamy

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| \simeq -20 \log_{10} \omega^2 = -40 \log_{10} \omega$$
$$\angle G(j\omega) = -180^\circ$$



Podstawowe człony dynamiczne

Człon 2-ego rzędu





Podstawowe człony dynamiczne

Sprężone zera

Transmitancja członu to

$$G(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = \omega_n^2 \left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1 \right)$$

(LF) Dla $s \simeq 0$ mamy $20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} \omega^2$

(MF) Punkt przegięcia dla $s = \omega_n$ [rad/sec]

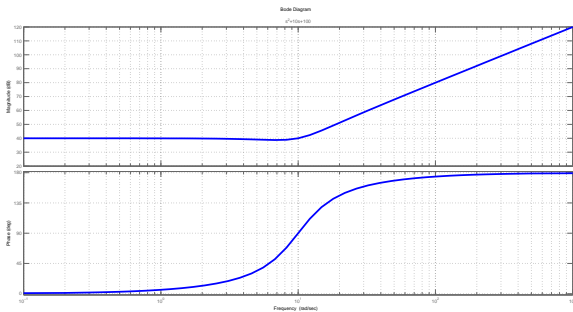
(HF) Dla $s \rightarrow \infty$ mamy

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| \simeq 20 \log_{10} \omega^2 = 40 \log_{10} \omega$$
$$\angle G(j\omega) = 180^\circ$$



Podstawowe człony dynamiczne

Sprężone zera





Podstawowe człony dynamiczne - podsumowanie

Opis	$G(s)$	punkt przegięcia	Nachylenie HF ([dB/dec])
Stała	K	-	0
Biegun w 0	$\frac{1}{s}$	-	-20
Zero w 0	s	-	+20
Rzecz. biegun	$\frac{1}{\tau s + 1}$	$\frac{1}{\tau}$	-20
Rzecz. zero	$\tau s + 1$	$\frac{1}{\tau}$	+20
Sprężone bieguny	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	ω_n	-40
Sprężone zera	$\frac{1}{\omega_n^2} (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$	ω_n	+40



Kształtowanie char. częstotliwościowej

Transmitancja układu zamkniętego

$$G_{cl}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)}$$

gdzie $G_o(s) = C(s)G(s)$. Rysując wykres Bode'go dla $G_o(s)$ dodajemy (graficznie) charakterystyki częstotliwościowe regulatora $C(s)$ i obiektu $G(s)$, gdyż

$$\begin{aligned} 20 \log_{10} |G_o(j\omega)| &= 20 \log_{10} |C(j\omega)G(j\omega)| \\ &= 20 \log_{10} |C(j\omega)| + 20 \log_{10} |G(j\omega)| \end{aligned}$$

oraz

$$\angle G_o(j\omega) = \angle C(j\omega) + \angle G(j\omega)$$



Projektowanie regulatorów w dziedzinie częstotliwości

Metody projektowania w dziedzinie częstotliwości mają wiele zalet:

- Stabilność i wymagania jakościowe są prezentowane na tym samym wykresie.
- Możemy używać rzeczywistych pomiarów (FRF) zamiast modelu w formie transmitancji.
- Projektowanie jest niezależne od rzędu układu.
- Regulatory dla układów z opóźnieniami też możemy projektować bez większych trudności.
- Metody graficzne (analiza i synteza z użyciem odpowiednich diagramów) jest relatywnie łatwa.



Zapas wzmocnienia i fazy

Zapas wzmocnienia

Zmiana wzmocnienia w układzie otwartym ($K(s)G(s)$) potrzebna aby układ zamknięty był niestabilny. Układy z większym zapasem wzmocnienia są bardziej odporne (ang. *robust*) na zmiany parametrów układu zanim układ zamknięty będzie niestabilny.



Zapas wzmocnienia i fazy

Zapas fazy

Zmiana fazy w układzie otwartym ($K(s)G(s)$) potrzebna aby układ zamknięty był niestabilny.

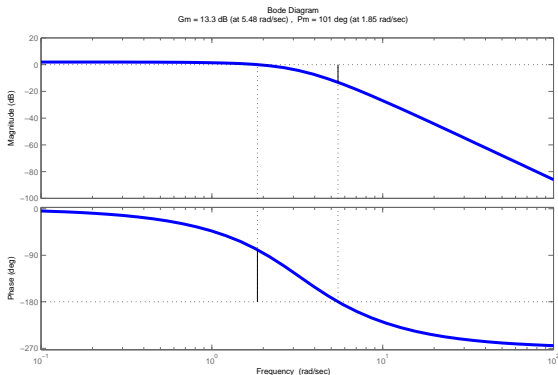
Zapas fazy określa tolerancję układu na opóźnienia. Opóźnienia większe niż $180/\omega_{pc}$ (ω_{pc} - częstotliwość przy którym przesunięcie fazowe = 180°) w pętli powodują niestabilność układu zamkniętego.



Zapas wzmocnienia i fazy

Przykład

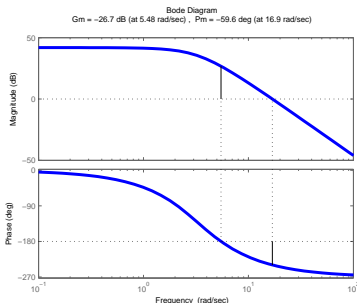
$$K(s) = 50, G(s) = \frac{1}{s^3 + 9s^2 + 30s + 40}$$





Zapas wzmocnienia i fazy

Zmieniając wzmocnienie układu ($K(s) = 5000(100\times)$) nie musimy kreślić nowego wykresu Bode'go aby odczytać zapas fazy. Wystarczy na utworzonym już wykresie sprawdzić zapas fazy dla -40dB (40dB odpowiada wzmocnieniu 100 razy).





Pasma przenoszenia

Pasmem przenoszenia (ang. *bandwidth*) - częstotliwość (ω_{BW}) przy której wzmocnienie układu zamkniętego = -3dB . Jednak korzystając z metod odpowiedzi częstotliwościowej oczekujemy określenia odpowiedzi układu zamkniętego na podstawie odpowiedzi układu otwartego.

Na podstawie odpowiedzi układu 2-ego rzędu, możemy przyjąć, iż pasmo przenoszenia odpowiada częstotliwości dla której wzmocnienie układu otwartego jest pomiędzy -6 i -7.5dB (przyjmując, że przesunięcie fazowe dla tego wzmocnienia jest pomiędzy -135° i -225°).

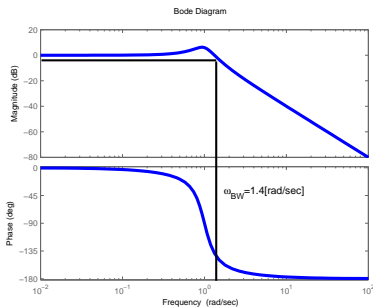


Pasmo przenoszenia

Przykład

Transmitancja układu zamkniętego

$$G_{cl} = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 1}$$

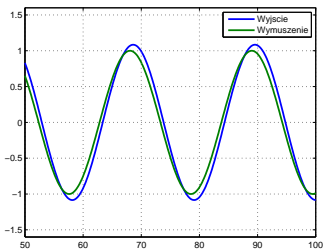




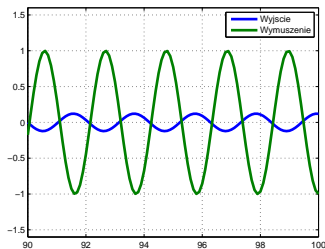
Pasmo przenoszenia

Przykład

dla $\omega < \omega_{BW}$



dla $\omega > \omega_{BW}$

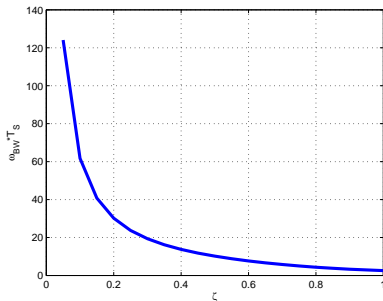




Pasma przenoszenia

Relacje ze współczynnikiem tłumienia (ζ) i czasem ustalania (T_S)

$$\omega_{BW} = \omega_n \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$
$$\omega_n = \frac{4}{T_S \zeta}$$

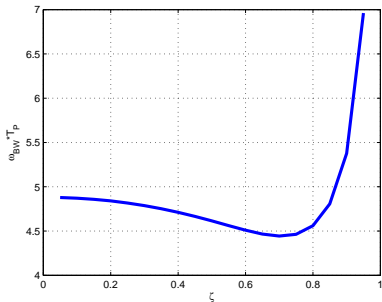




Pasmo przenoszenia

Relacje ze współczynnikiem tłumienia (ζ) i czasem max. przeregulowania (T_P)

$$\omega_{BW} = \omega_n \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$
$$\omega_n = \frac{\pi}{T_P \sqrt{1 - \zeta^2}}$$





Wskaźniki jakościowe

Określanie wskaźników jakościowych układu zamkniętego:

- musimy zapewnić stabilność układu otwartego jeśli będziemy używać diagramów Bode'go.
- sprawdzamy czy $\omega_{gc} < \omega_{pc}$ aby stwierdzić czy układ zamknięty będzie stabilny.
- dla układu 2-ego rzędu, współczynnik tłumienia (układu zamkniętego) jest w przybliżeniu równa $PM/100$ (jeśli $PM = 0 \div 60^\circ$).
- dla układu 2-ego rzędu, istnieją zależności pomiędzy współczynnikiem tłumienia, pasmem przenoszenia i czasem ustalania .
- w przybliżeniu możemy przyjąć że pasmo przenoszenia będzie równe częstotliwości drgań własnych.