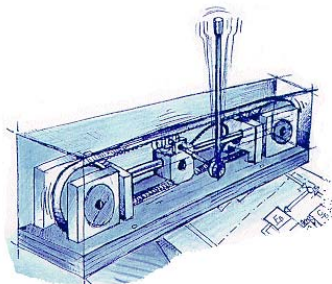


Automatyka i robotyka

Wykład 7 - Projektowanie kompensatorów



Wojciech Paszke

Instytut Sterowania i Systemów
Informatycznych,
Uniwersytet Zielonogórski



Plan wykładu

Kompensator wyprzedzający

Kompensator opóźniający



Plan wykładu

Kompensator wyprzedzający

Kompensator opóźniający



Podstawowe założenia:

- kształtujemy charakterystykę układu otwartego aby uzyskać:
 - pożądane (duże) wzmocnienie w zakresie niskich częstotliwości aby minimalizować błąd w stanie ustalonym i minimalizację wpływu zakłóceń
 - odpowiednią częstotliwość graniczną wzmocnienia aby otrzymać pożądane pasmo przenoszenia (szybkość odpowiedzi)
 - odpowiednie zapasy fazy i wzmocnienia



Kompensator wyprzedzający

Transmitancja

$$C(s) = \frac{1 + sT}{1 + s\alpha T}$$

gdzie $\alpha < 1$.

Zadanie

Dobrać parametry α i T tak aby uzyskać dla układu otwartego założony zapas fazy $PM = \varphi$. Dzięki temu możliwa będzie redukcja oscylacji na wykresie odpowiedzi skokowej.



Kompensator wyprzedzający

Własności kompensatora

- maksymalne przesunięcie fazy w przód to

$$\phi_m = \sin^{-1} \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right)$$

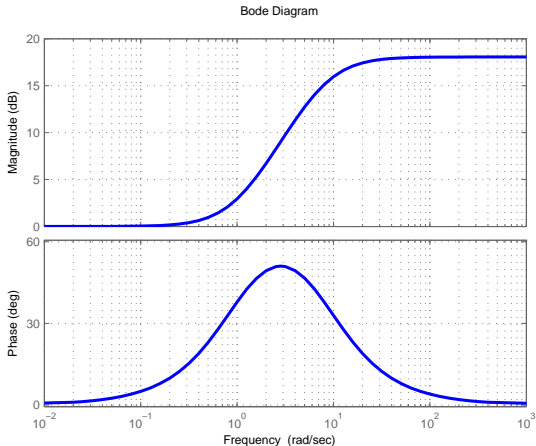
- maksymalne przesunięcie fazy w przód dla częstotliwości

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha} T}$$

- maksymalne wzmocnienie dla ω_m wynosi

$$20 \log(\sqrt{\alpha}) = 10 \log(\alpha)$$

Kompensator wyprzedzający ($T = 1, \alpha = 0.125$)





Kompensator wyprzedzający

Własności kompensatora

- $\frac{1}{T} \leq \omega_m \leq \frac{1}{\alpha T}$
- maksymalne wzmocnienie dla ω_m to połowa sumy wzmocnienia początkowego i końcowego

w praktyce możemy użyć tabeli

α	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/8	1/10
ϕ_m	19.5	30	38.9	41.8	45.6	51.1	54.9
$G_m[\text{dB}]$	3.01	4.77	6.02	6.99	7.78	9.03	10.0



Kompensator wyprzedzający

Procedura projektowania dla wymaganego $PM=\varphi$

- wyznacz zapas fazy układu bez kompensatora ϕ
- biorąc pod uwagę margines bezpieczeństwa ϵ , określ wymagany zapas fazy do uzyskania przez kompensator

$$\phi_m = \varphi - \phi + \epsilon$$

gdzie $\epsilon = 5 \div 18$

- Dobierz parametr α z odpowiednich równań lub tabeli
- Wyznacz wartość $10 \log \alpha$ (albo odczytaj z tabeli) i określ częstotliwość gdzie wzmacnienie układu bez kompensatora jest $-10 \log \alpha$ [dB]. Ta częstotliwość to ω_{BW}
- wykreśl wykresy Bode'go i ewentualnie powtórz całą procedurę



Kompensator wyprzedzający - przykład

Dana jest transmitancja obiektu

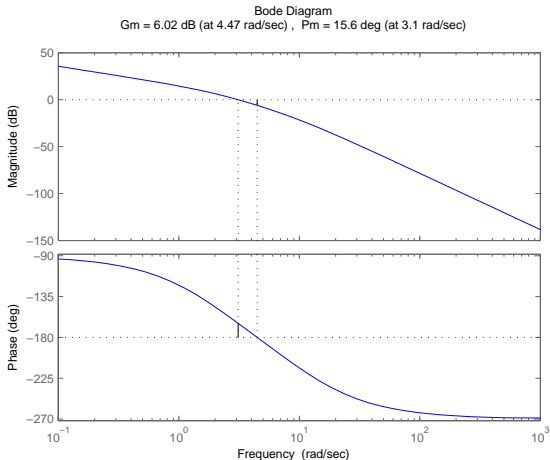
$$G(s) = \frac{6}{s(1 + 0.5s)(1 + 0.1s)}$$

Dla tego obiektu:

- Zapas fazy jest mały, $PM=15$ [deg]
- Pożądane jest zwiększenie PM do ok. 40 [deg] (przeregulowanie $\eta = 25\%$)



Kompensator wyprzedzający - przykład





Kompensator wyprzedzający - przykład

Projektowanie kompensatora

- Wymagane przesunięcie fazowe to ok. 40 [deg]

$$(40 - 15.6 + \epsilon) = 40 \text{ gdy } \epsilon = 15.6$$

i kompensator musi przesuwać fazę o 40 [deg].

- $\epsilon = 5 - 10$ [deg] dla obiektów względnego stopnia 2, $\epsilon = 12 - 18$ [deg] dla obiektów względnego stopnia 3.
- Z tabeli α może być $1/4$ lub $1/5$. Przykładowo wybieramy $\alpha = 1/5$ czyli $\epsilon = 17.4$ i wzmacnienie to 6.99[dB].



Kompensator wyprzedzający - przykład

Projektowanie kompensatora

- Z charakterystyki obiektu ($G(s)$) odczytujemy, że $|G(j\omega)| \simeq -7[\text{dB}]$ dla $\omega = 4.74$
- Oznacza to, że

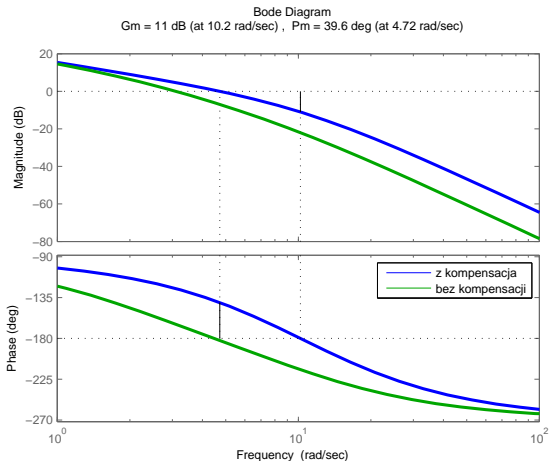
$$4.74 = \frac{1}{T\sqrt{1/5}} \text{ czyli } T = 0.472$$

- transmitancja kompensatora to

$$C(s) = \frac{1 + 0.472s}{1 + 0.094s}$$

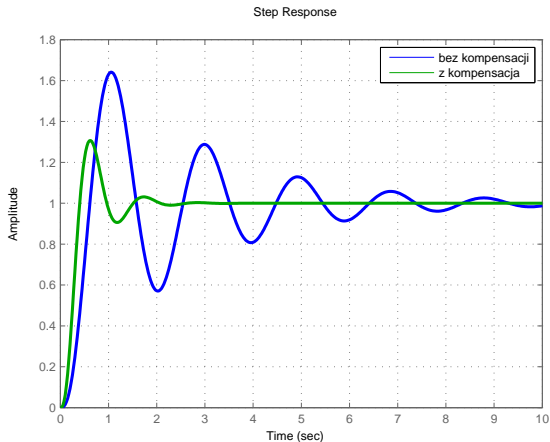


Kompensator wyprzedzający - przykład





Kompensator wyprzedzający - przykład





Kompensator wyprzedzający

Metoda analityczna

Cel metody

Chcemy aby układ otwarty $C(s)G(s)$ miał wzmocnienie $|C(s)G(s)| = 1$ i przesunięcie fazowe $\varphi - 180^\circ + \text{PM}$ dla częstotliwości $s = j\omega_{gc}$

$$K(j\omega_{gc})G(j\omega_{gc}) = K_c \frac{j\omega_{gc}\tau_z + 1}{j\omega_{gc}\tau_p + 1} M_G e^{j\theta_G} = 1 e^{j(-180 + \text{PM})}$$

gdzie M_G i θ_G to wzmocnienie (ale nie w dB) i faza $G(j\omega)$ dla $\omega = \omega_{gc}$



Kompensator wyprzedzający

Metoda analityczna

Cel metody

Dokonując separacji równania na część rzeczywistą i urojoną otrzymujemy dwa równania z dwiema niewiadomymi: τ_z i τ_p

Rozwiązanie:

$$\tau_z = \frac{1 + K_c M_G \cos(PM - \theta_G)}{-\omega_{gc} K_c M_G \sin(PM - \theta_G)}$$
$$\tau_p = \frac{\cos(PM - \theta_G) + K_c M_G}{\omega_{gc} \sin(PM - \theta_G)}$$



Kompensator wyprzedzający

Metoda analityczna-przykład

Dany jest obiekt

$$G(s) = \frac{400}{s(s^2 + 30s + 200)}$$

Należy zaprojektować kompensator wyprzedzający tak aby uzyskać następujące wskaźniki jakościowe:

- $e_{ssramp} \leq 10\%$ - błąd w stanie ustalonym dla sygnału liniowo narastającego
- $\omega_{gc} = 14$ [rad/sec]
- $PM = 45^\circ$



Kompensator wyprzedzający

Metoda analityczna-przykład

Błąd w stanie ustalonym

$$e_{SSramp} = \frac{1}{K_V} \text{ gdzie } K_V = \lim_{s \rightarrow 0} s(K_C G)$$

Aby $e_{SSramp} \leq 0.1$ to $K_V = 10$. Oznacza to, że $K_C = 5$, gdyż

$$\lim_{s \rightarrow 0} s(G) = \frac{400}{200} = 2$$



Kompensator wyprzedzający

Metoda analityczna-przykład

Dla $\omega = \omega_{gc} = 14[\text{rad/sec}]$

- $M_G = 0.068$
- $\theta_G = -180^\circ$

Wynik obliczeń:

- $\tau_z = 0.227$
- $\tau_p = 0.038$

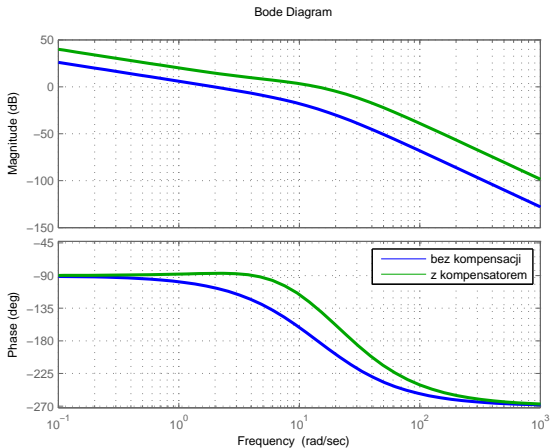
Kompensator

$$C(s) = 5 \frac{0.227s + 1}{0.038s + 1}$$



Kompensator wyprzedzający

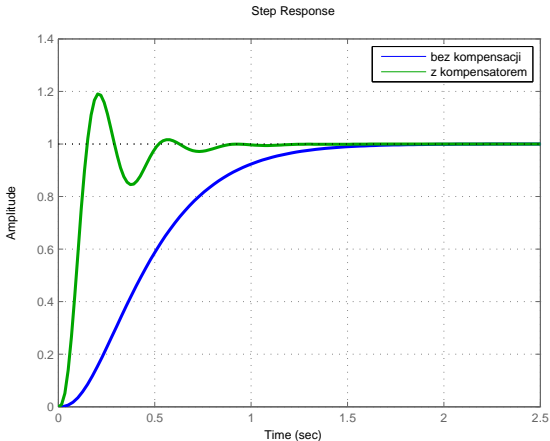
Metoda analityczna-przykład





Kompensator wyprzedzający

Metoda analityczna-przykład





PD versus kompensator wyprzedzający

Idealny i rzeczywisty PD

$$K_p + K_d s \qquad K_p + \frac{K_d s}{sT_d + 1}$$

W przypadku rzeczywistego PD

$$PD(s) = K_p \frac{\left(T_d + \frac{K_d}{K_p}\right) s + 1}{T_d s + 1}$$

Wnioski:

- PD jest bardzo podobny do kompensatora wyprzedzającego
- PD ma biegun w nieskończoności



Kompensator opóźniający

Transmitancja

$$C(s) = \frac{1 + sT}{1 + s\alpha T}$$

gdzie $\alpha > 1$.

Własności:

- wprowadza opóźnienie więc zmniejsza PM (tendencja destabilizacji)
- nie używamy dla układów niestabilnych
- zmniejsza błąd w stanie ustalonym
- zmniejsza częstotliwość graniczną wzmocnienia (ω_{gc}) - spowolnienie odpowiedzi układu.



Kompensator opóźniający

Metoda analityczna

Cel metody

Chcemy aby układ otwarty $C(s)G(s)$ miał wzmocnienie $|C(s)G(s)| = 1$ i przesunięcie fazowe $\varphi - 180^\circ + \text{PM}$ dla częstotliwości $s = j\omega_{gc}$

$$K(j\omega_{gc})G(j\omega_{gc}) = K_c \frac{j\omega_{gc}\tau_z + 1}{j\omega_{gc}\tau_p + 1} M_G e^{j\theta_G} = 1e^{j(-180+\text{PM})}$$

gdzie M_G i θ_G to wzmocnienie (ale nie w dB) i faza $G(j\omega)$ dla $\omega = \omega_{gc}$



Kompensator opóźniający

Metoda analityczna

Dokonując separacji równania na część rzeczywistą i urojoną otrzymujemy dwa równania z dwiema niewiadomymi: τ_z i τ_p

Rozwiązanie:

$$\tau_z = \frac{1 + K_c M_G \cos(PM - \theta_G)}{-\omega_{gc} K_c M_G \sin(PM - \theta_G)}$$
$$\tau_p = \frac{\cos(PM - \theta_G) + K_c M_G}{\omega_{gc} \sin(PM - \theta_G)}$$



Kompensator opóźniający

Metoda analityczna-przykład

Dany jest obiekt

$$G(s) = \frac{10}{s(s+5)}$$

Należy zaprojektować kompensator opóźniający, tak aby uzyskać następujące wskaźniki jakościowe:

- $e_{SSramp} \leq 5\%$ - błąd w stanie ustalonym dla sygnału liniowo narastającego
- $\omega_{gc} = 2$ [rad/sec]
- $PM = 40^\circ$



Kompensator opóźniający

Metoda analityczna-przykład

Błąd w stanie ustalonym

$$e_{SSramp} = \frac{1}{K_V} \text{ gdzie } K_V = \lim_{s \rightarrow 0} s(K_C G)$$

Aby $e_{SSramp} \leq 0.05$ to $K_V = 20$. Oznacza to, że $K_C = 10$, gdyż

$$\lim_{s \rightarrow 0} s(G) = \frac{10}{5} = 2$$



Kompensator opóźniający

Metoda analityczna-przykład

Dla $\omega = \omega_{gc} = 2[\text{rad/sec}]$

- $M_G = 0.9285$
- $\theta_G = -111.8014^\circ$

Wynik obliczeń:

- $\tau_z = 0.8186$
- $\tau_p = 8.8920$

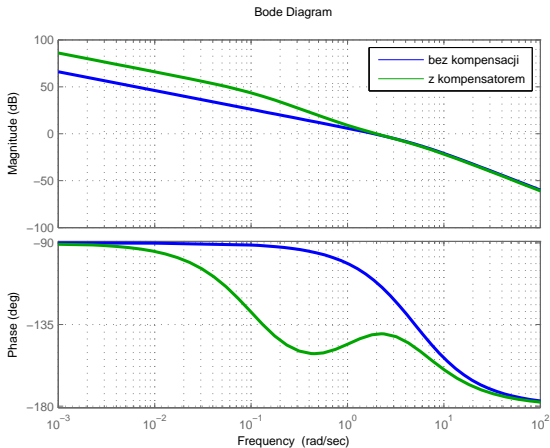
Kompensator

$$C(s) = 10 \frac{0.8186s + 1}{8.8920s + 1}$$



Kompensator opóźniający

Metoda analityczna-przykład





PI versus kompensator opóźniający

Transmitancja regulatora PI

$$K_p + \frac{K_i}{s}$$

Sprowadzając do wspólnego mianownika otrzymujemy

$$PI(s) = \frac{K_p s + K_i}{s} = K_p \frac{s + \frac{K_i}{K_p}}{s}$$

Wnioski:

- PI jest bardzo podobny do kompensatora opóźniającego
- PI ma biegun w zerze



Projektowanie kompensatora

Metoda analityczna 2

Metoda dla kompensatora postaci

$$C(s) = \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts}$$

gdzie $\alpha < 1$ daje wyprzedzenie a $\alpha > 1$ opóźnienie.

Własności:

- Przesunięcie fazowe dla częstotliwości ω

$$p = \operatorname{tg} \phi = \frac{\alpha\omega T - \omega T}{1 + (\omega T)^2 \alpha}$$

- Wzmocnienie (w [dB]) dla częstotliwości ω

$$c = 10^{\frac{M}{10}} = \frac{1 + (\omega\alpha T)^2}{1 + (\omega T)^2}$$



Projektowanie kompensatora

Metoda analityczna 2

Mozemy sprawdzić, że

$$(p^2 - c + 1)\alpha^2 + 2p^2c\alpha + p^2c^2 + c^2 - c = 0$$

gdzie wymagane jest aby $c > p^2 + 1$.

Rozwiązując powyższe równanie otrzymujemy

$$T = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{1-c}{c-\alpha^2}}$$

Uwaga! dla opóźnienia $\phi < 0$, $M < 0$ i $c < \frac{1}{1+p^2}$



Projektowanie kompensatora

Metoda analityczna 2

Procedura postępowania (wyprzedzenie)

1. Wybrać częstotliwość $\omega = \omega_{gc}$
2. Określić wymagany PM a przez to wymagany ϕ
3. Sprawdzić czy $\phi > 0$ i $M > 0$
4. Sprawdzić zależność $c > p^2 + 1$
5. Określić parametr α
6. Określić parametr T
7. Powtórzyć całą procedurę jeśli to jest wymagane



Projektowanie kompensatora

Metoda analityczna 2 - przykład

Dany jest układ

$$G(s) = \frac{10}{s^2}$$

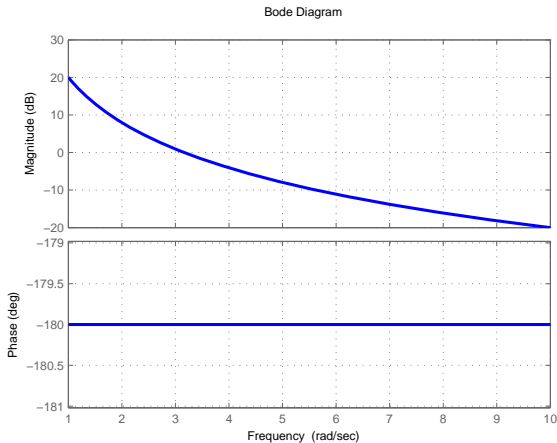
Wymagania jakościowe:

- $PM = 45^\circ$
- Częstotliwość graniczna fazy $\omega_{gc} = 5[\text{rad}/\text{sec}]$



Projektowanie kompensatora

Metoda analityczna 2 - przykład





Projektowanie kompensatora

Metoda analityczna 2 - przykład

Wymagane $\phi = 45^\circ$ i $M = 8[\text{dB}]$

$$p = \text{tg}(45^\circ) = 1; \quad c = 10^{\frac{8}{10}} = 6.31$$

Rozwiązując odpowiednie równania otrzymujemy

$$\alpha = 5.84; \quad T = 0.087$$

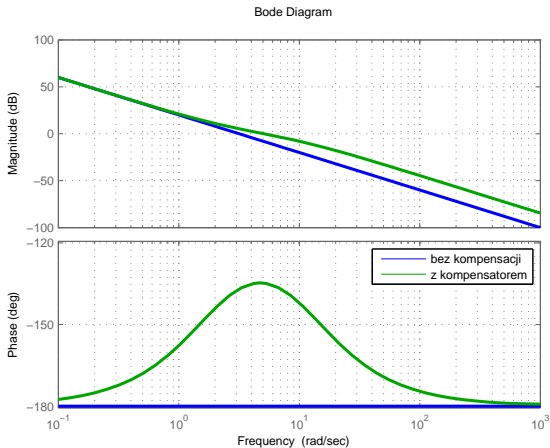
Transmitancja kompensatora

$$C(s) = \frac{1 + 0.515s}{1 + 0.087s}$$



Kompensator wyprzedzający

Metoda analityczna 2 - przykład





Kompensator wyprzedzający

Metoda analityczna 2 - przykład

