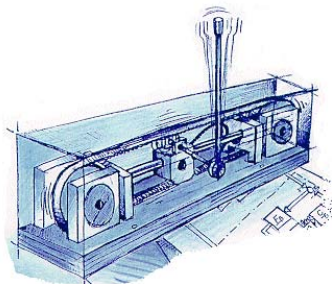


Automatyka i robotyka

Wykład 8 - Regulator PID



Wojciech Paszke

Instytut Sterowania i Systemów
Informatycznych,
Uniwersytet Zielonogórski



Plan wykładu

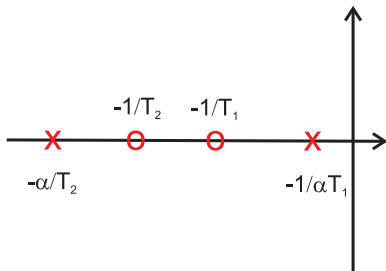
regulator PID



Kompensator wyprzedzająco-opóźniający

Transmitancja kompensatora ($\alpha > 1$, $T_1 > T_2$)

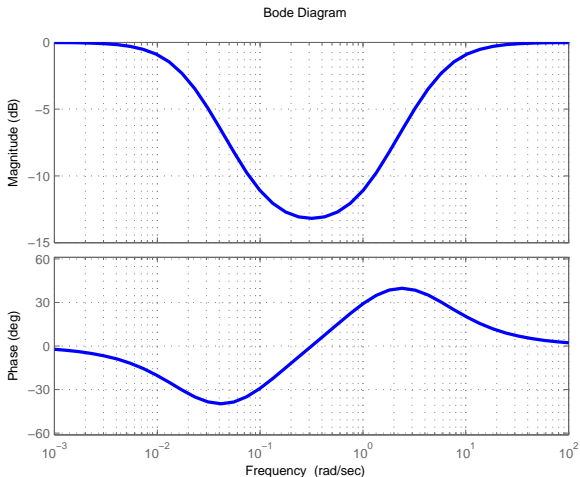
$$K(s) = \frac{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}{(1 + \alpha T_1 s)(1 + \alpha^{-1} T_2 s)}$$





Kompensator wyprzedzająco-opóźniający

$$T_1 = 10, T_2 = 1, \alpha = 5$$





Kompensator wyprzedzająco-opóźniający

Własności

- maksymalne opóźnienie

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{1 - \alpha}{2\sqrt{\alpha}} \right) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{-4}{4.4721} \right) = -41.8103[\text{deg}]$$

- maksymalne wyprzedzenie

$$\phi = -\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{1 - \alpha}{2\sqrt{\alpha}} \right) = -\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{-4}{4.4721} \right) = 41.8103[\text{deg}]$$

- wzmocnienie

$$-20 \log(\alpha) = -13.9794[\text{dB}]$$



Regulator PID

Transmitancja regulatora

$$K(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

lub

$$K(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

lub

$$K(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \left(\frac{1 + \tau_d s}{1 + \frac{\tau_d s}{\gamma}} \right)$$



Regulator PID

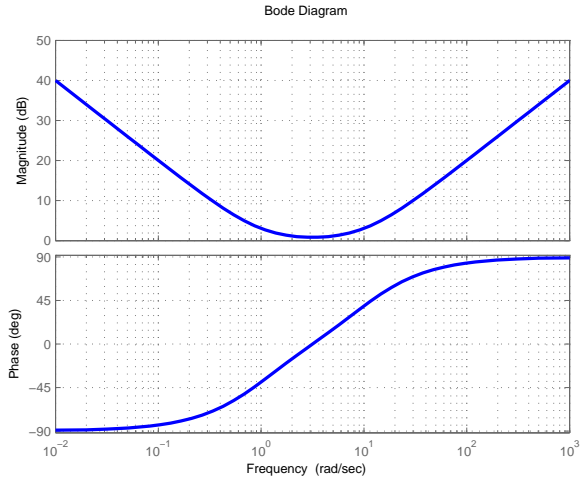
Transmitancja regulatora

$$\begin{aligned}K(s) &= K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \\ &= \frac{K_i \left(\frac{K_d}{K_i} s^2 + \frac{K_p}{K_i} s + 1 \right)}{s} \\ &= \frac{K_i (\tau s + 1) \left(\frac{\tau}{\alpha} s + 1 \right)}{s}\end{aligned}$$



Regulator PID

$$K_i = 2, \quad \alpha = 10$$





regulator PID

regulator PID jako połączenie PI i PD

$$C_{PI}(s) = \hat{K}_p + \frac{\hat{K}_i}{s}, \text{ regulator PI}$$

$$C_{PD}(s) = \bar{K}_p + \bar{K}_d s \text{ regulator PD}$$

$$\begin{aligned} C_{PID}(s) &= C_{PI}(s)C_{PD}(s) = \left(\hat{K}_p + \frac{\hat{K}_i}{s} \right) (\bar{K}_p + \bar{K}_d s) \\ &= \left(K_p K_p + \hat{K}_i \bar{K}_d \right) + \hat{K}_p \bar{K}_d + \frac{\hat{K}_i \bar{K}_p}{s} \\ &= K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \end{aligned}$$



regulator PID

Równoległy PID

$$K(s) = K \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s \right)$$

Jeżeli $\tau_i > 4\tau_d$ to

$$K(s) = K (\alpha + \tau_d s) \left(1 + \frac{1}{\alpha \tau_i s} \right) = K_{PD}(s) K_{PI}(s)$$

gdzie

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{\tau_d}{\tau_i}}}{2} > 0$$



Wpływ części całkującej

Dla $T_i \neq 0$ i $T_d = 0$ otrzymujemy

- wzmocnienie $\forall \omega$

$$\left| 1 + \frac{1}{j\omega T_i} \right| = \sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 T_i^2}} > 1$$

- przesunięcie fazowe $\forall \omega$

$$\angle \left(1 + \frac{1}{j\omega T_i} \right) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{-1}{\omega T_i} \right) < 0$$

Oznacza to, iż

- zmniejszamy PM i GM, czyli zwiększamy oscylacje



Wpływ części różniczkującej

Dla $T_d \neq 0$ i $T_i = 0$ otrzymujemy

- wzmacnienie $\forall \omega$

$$|1 + j\omega T_d| = \sqrt{1 + \omega^2 T_d^2} > 1$$

- przesunięcie fazowe $\forall \omega$

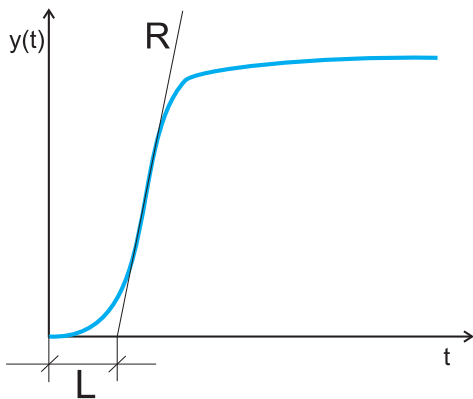
$$\angle(1 + j\omega T_d) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega T_d}{1}\right) \in [0, \frac{\pi}{2}] > 0$$

Oznacza to, iż

- zwiększamy PM, czyli zmniejszamy oscylacje



Dobór parametrów regulatora PID



- L - opóźnienie odpowiedzi
- R - nachylenie odpowiedzi układu (największe możliwe nachylenie)



Dobór parametrów regulatora PID

Metoda Metoda Ziegler'a-Nichols'a

- regulator P:

$$K = \frac{1}{RL}$$

- regulator PI:

$$K = \frac{0.9}{RL}$$

$$T_i = 3.3L$$

- regulator PID

$$K = \frac{1.2}{RL}$$

$$T_i = 2L$$

$$T_d = 0.5L$$



Dobór parametrów regulatora PID

Metoda Ziegler'a-Nichols'a 2

Algorytm (układ zamknięty)

- Ustaw $K_i = K_d = 0$
- Zwiększaj K_p aż do wystąpienia niegasnących oscylacji na wyjściu
- Zanotuj K_c i ω_c czyli wzmocnienie przy którym wystąpiły oscylacje niegasnące i ich pulsację
- Wyznacz parametry regulatora ze wzorów

$$K_p = 0.6K_c, \quad K_d = \frac{K_p\pi}{4\omega_c}, \quad K_i = \frac{K_p\omega_c}{\pi}$$



Dobór parametrów regulatora PID

Metoda Zigler-Nichols'a

- regulator P:

$$K = 0.5K_c$$

- regulator PI:

$$K = 0.45K_c$$

$$T_i = 0.833T$$

- regulator PID

$$K = 0.6K_c$$

$$T_i = 0.5T$$

$$T_d = 0.125T$$

gdzie T - okres drgań niegasnących



Dobór parametrów regulatora PID

Przykład

Transmitancja obiektu

$$G(s) = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Równanie charakterystyczne układu zamkniętego

$$D(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6(K+1)$$

Z kryterium Routh'a otrzymujemy $K_c = 10$ i $\omega_c = 3.317$ czyli

$$T = \frac{2\pi}{\omega_c} = 1.895$$



Dobór parametrów regulatora PID

Przykład

- regulator P:

$$K = 5$$

- regulator PI:

$$K = 4.5$$

$$T_i = 1.57$$

- regulator PID

$$K = 6$$

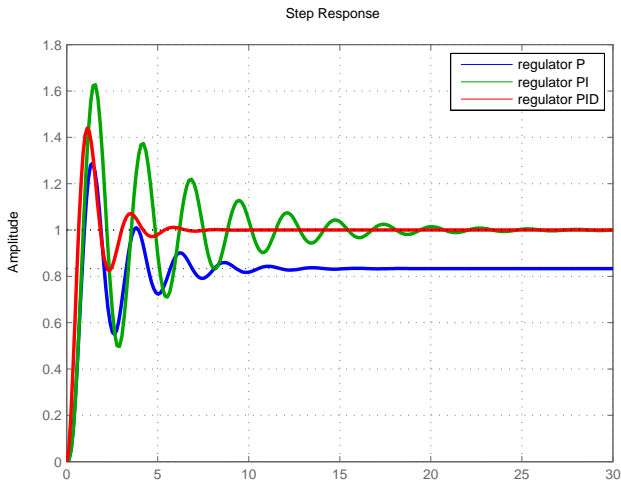
$$T_i = 0.947$$

$$T_d = 0.237$$



Dobór parametrów regulatora PID

Przykład





Dobór parametrów regulatora PID

Metoda Ziegler-Nichols'a 2 - przykład

Dany jest obiekt

$$G(s) = \frac{400}{s(s^2 + 30s + 200)}$$

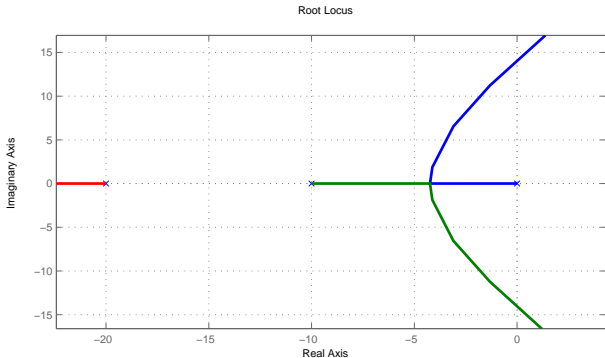
a jego charakterystyka to

- bieguny układu zamkniętego = $\{-4.2 \pm 0.93j, -21.59\}$
- $\omega_{gc} = 1.95$ [rad/sec]
- GM=23 [dB]
- PM=73 [deg]
- POS=0



Dobór parametrów regulatora PID

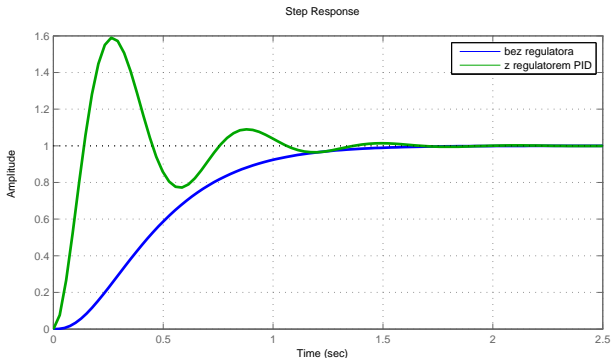
Wykres linii pierwiastkowych



$$K_c = 14, \omega_c = 14[\text{rad/sec}]$$

Dobór parametrów regulatora PID

Odpowiedź skokowa

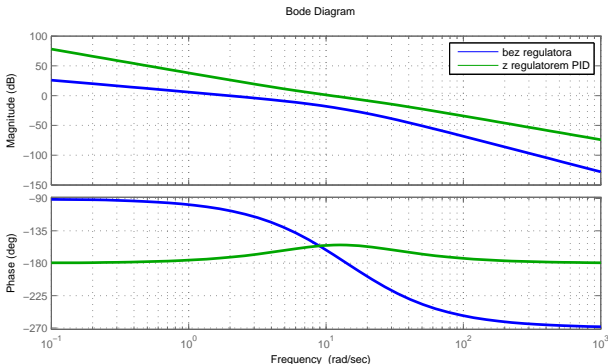


Wynik obliczeń: $K_p = 9$, $K_d = 0.5$, $K_i = 40$



Dobór parametrów regulatora PID

Charakterystyka częstotliwościowa



Wynik regulacji: POS=60%, $T_s = 1.2[\text{sec}]$, $\omega_{gc} = 11[\text{rad/sec}]$,
PM=25[deg], $e_{ss} \simeq 0$



Dobór parametrów regulatora PID

Metoda analityczna

Fakt: **metoda Ziegler-Nichols'a nie pozwala na osiągnięcie zadanych wymagań jakościowych.**

- Transmitancja układu otwartego

$$G_o(s) = \left(K_p + K_d s + \frac{K_i}{s} \right) G(s)$$

- Jeśli $G(s)$ jest typu n to typ $G_o(s)$ jest $n + 1$
- K_i może być znalezione z wymagań na błąd w stanie ustalonym, ponieważ

$$K_{n+1} = s^n K_i G(s) |_{s=0} = \frac{1}{e_{ss}}$$

gdzie K_{n+1} jest stałą uchybu



Dobór parametrów regulatora PID

Metoda analityczna

- Fakty (układ zamknięty vs. układ otwarty)

$$\omega_n \simeq \omega_{gc} \quad \zeta = f(PM)$$

- dla znanego K_i ($|G(j\omega_{gc})| = 1$ i $\theta(\omega_{gc}) = -180^\circ + PM$)

$$\left(K_p + j\omega_{gc}K_d + \frac{K_i}{j\omega_{gc}} \right) G(j\omega_{gc}) = 1e^{j\theta(\omega_{gc})}$$

czyli

$$K_p + j\omega_{gc}K_d = \frac{1e^{j\theta(\omega_{gc})}}{G(j\omega_{gc})} + j\frac{K_i}{\omega_{gc}} = R + jX$$

- Ostatecznie $K_p = R$ i $K_d = \frac{X}{\omega_{gc}}$



Metoda analityczna-przykład

Dany jest obiekt

$$G(s) = \frac{400}{s(s^2 + 30s + 200)}$$

a wymagania jakościowe regulacji to

- przeregulowanie POS= 10%
- czas regulacji $T_s = 2[\text{sec}]$
- $e_{SSramp} \leq 10\%$ - błąd w stanie ustalonym dla sygnału liniowo narastającego



Metoda analityczna-przykład

- $G(s)$ jest typu 1 a więc liczymy stałą uchybu K_2

$$K_2 = sK_i G(s)|_{s=0} = 2K_i = \frac{1}{0.1} = 10 \rightarrow K_i = 5$$

- dla zadanych POS i T_s możemy wyznaczyć dla układu zamkniętego

$$\zeta = \frac{-\ln(POS/100)}{\sqrt{(\pi^2 + \ln^2(POS/100))}} \simeq 0.6\omega_n \simeq \frac{4.6}{\zeta T_s} \simeq 4[\text{rad/sec}]$$

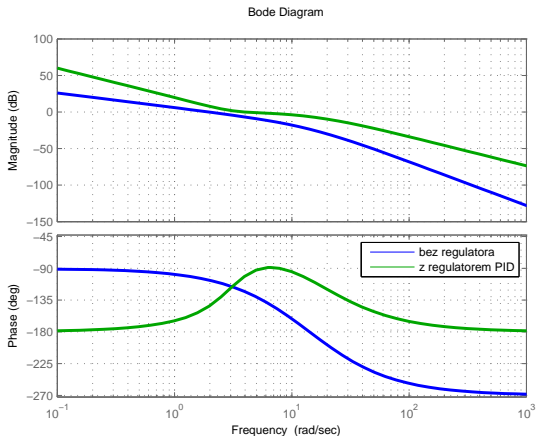
- dlatego $\omega_{gc} = 4[\text{rad/sec}]$ oraz

$$PM = \text{tg}^{-1} \frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1 + 4\zeta^4}}} \simeq 60[\text{deg}]$$



Metoda analityczna-przykład

Rozwiązanie: $K_i = 5$, $K_p = 2.02$, $K_d = 0.52$





Metoda analityczna-przykład

