Kinematyka prosta: reprezentacja Denavita-Hartenberga

Przypomnienie: ruchy sztywne

- Ruch sztywny jest połączeniem obrotu i przesunięcia
  - zdefiniowany macierzą obrotu (R) i wektorem przesunięcia (d)
  - grupę wszystkich ruchów sztywnych (d,R) nazywa się **specjalną grupą euklidesową**, $SE(3)$
- Ruchy sztywne (obroty i przesunięcia) możemy reprezentować w postaci mnożenia macierzy
- Mnożenie przez macierz H określa się jako **przekształcenie jednorodne**; mamy

$$H = \begin{bmatrix} R^T & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Przekształcenie odwrotne:

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przypomnienie: przekształcenia jednorodne

- Przekształcenia podstawowe:
  - Trzy czyste obroty, trzy czyste przesunięcia

$$\mathbf{Trans}_{x,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Rot}_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Trans}_{y,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Rot}_{y,\beta} = \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Trans}_{z,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Rot}_{z,\gamma} = \begin{bmatrix} c_\gamma & -s_\gamma & 0 & 0 \\ s_\gamma & c_\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przykład

- Kąty Eulera: omawialiśmy tylko kąty Eulera ZYZ. Jaki jest zbiór wszystkich możliwych zestawów kątów Eulera, których można używać do reprezentacji dowolnej macierzy obrotu?
  - XYZ, YZX, ZXY, XYX, YZY, ZXZ, XZY, YXZ, ZYX, XZX, YXY, ZYZ
  - ZZY nie można użyć do opisu dowolnej zadanej macierzy obrotu ponieważ dwa kolejne obroty wokół osi Z redukują się do jednego obrotu

Przykład

- Wyznaczyć przekształcenie jednorodne opisujące przesunięcie o 3 jednostki wzdłuż osi *x*, po którym następuje obrót o $\pi/2$ wokół bieżącej osi *z*, a potem przesunięcie o 1 jednostkę wzdłuż osi *y* układu pierwotnego.

$$T = T_{y,1} T_{x,3} T_{z,\pi/2}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

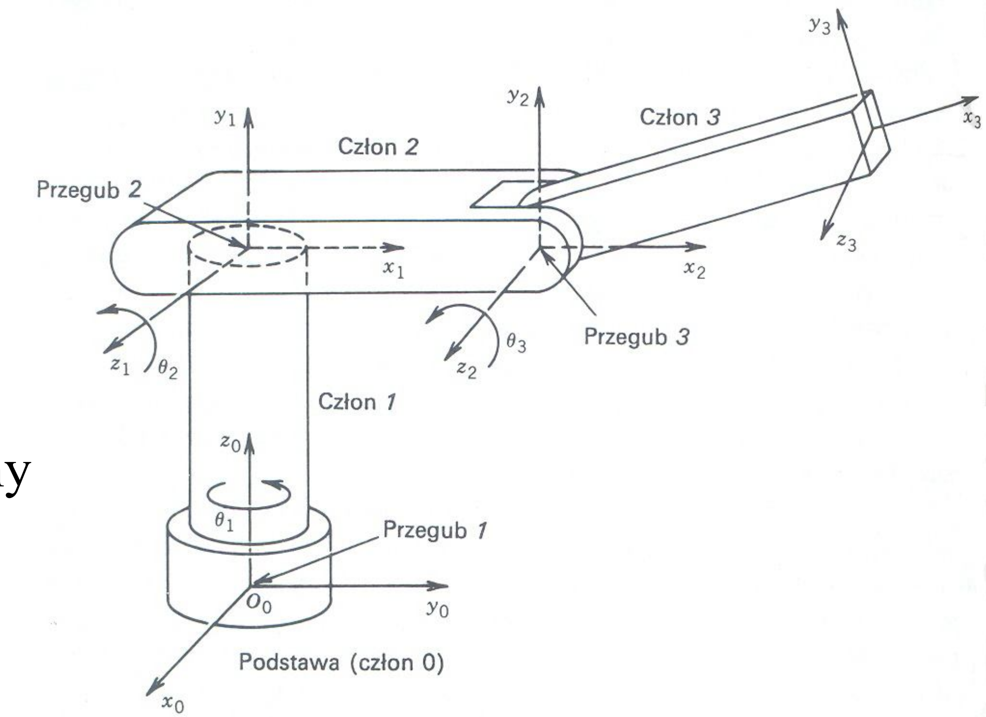
Kinematyka prosta: wprowadzenie

- Zadanie: mając dane wszystkie parametry przegubów manipulatora, określić pozycję i orientację układu współrzędnych końcówki roboczej
  - Układ końcówki roboczej: układ współrzędnych związany na sztywno z najbardziej odległym członem manipulatora
  - Układ inercyjny: ustalony (nieruchomy) układ współrzędnych związany na sztywno z najbliższym podstawie członem manipulatora
- W konsekwencji, poszukujemy odwzorowania między układem końcówki roboczej i układem inercyjnym
  - Będzie ono funkcją parametrów wszystkich przegubów i geometrii manipulatora
  - Problem czysto geometryczny: nie przejmujemy się momentami obrotowymi ani dynamiką
  - Jednak…

Konwencja

- Manipulator o *n* stopniach swobody ma *n* przegubów (obrotowych albo pryzmatycznych) i *n*+1 członów (bo każdy przegub łączy dwa człony)
  - Zakładamy, że każdy przegub ma tylko jeden stopień swobody. Choć wydaje się, że nie uwzględnia to np. przegubów kulowych lub kielichowych, zauważmy że możemy je traktować jak kombinacje przegubów o pojedynczych stopniach swobody z zerową długością członów między nimi.
  - Układ o_0 jest inercyjny.
  - o_n jest układem narzędzia.
  - Przegub *i* łączy człony *i*-1 and *i.*
  - o_i jest związany z członem *i.*
- Zmienne przegubowe, q_i

$$q_i = \begin{cases} \theta_i & \text{gdy przegub } i \text{ jest obrotowy} \\ d_i & \text{gdy przegub } i \text{ jest pryzmatyczny} \end{cases}$$



Konwencja

- Powiedzieliśmy, że przekształcenie jednorodne pozwala na wyrażenie położenia i orientacji o_j względem o_i
  - To, czego chcemy, to położenie i orientacja układu końcówki roboczej względem układu inercyjnego.
  - Pośrednim krokiem jest określenie macierzy transformacji dającej położenie i orientację o_i względem o_{i-1}: A_i
  - Teraz możemy zdefiniować przekształcenie o_j do o_i następująco:

$$T_j^i = \begin{cases} A_{i+1}A_{i+2}\ldots A_{j-i}A_j & \text{gdy } i < j \\ I & \text{gdy } i = j \\ \left(T_i^j\right)^{-1} & \text{gdy } j > i \end{cases}$$

Konwencja

- W końcu, położenie i orientacja układu narzędzia względem układu inercyjnego są dane macierzą przekształcenia jednorodnego:
  - Dla manipulatora o *n* stopniach swobody

$$H = \begin{bmatrix} R_n^0 & o_n^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = T_n^0 = A_1(q_1)A_2(q_2)\cdots A_n(q_n)$$

- Tak więc, aby w pełni zdefiniować kinematykę prostą dla dowolnego manipulatora szeregowego, wszystko czego potrzebujemy to określić przekształcenia A_i i wykonać mnożenie macierzowe.

- Jednak istnieją pewne proste sposoby pozwalające dokonać tego przy mniejszym wysiłku…

Konwencja Denavita-Hartenberga (DH)

- Reprezentowanie każdego pojedynczego przekształcenia jednorodnego jako iloczynu czterech przekształceń podstawowych:

$$A_i = \mathbf{Rot}_{z,\theta_i}\mathbf{Trans}_{z,d_i}\mathbf{Trans}_{x,a_i}\mathbf{Rot}_{x,\alpha_i}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Konwencja Denavit-Hartenberg (DH)

- Cztery parametry DH:
  - a_i: długość członu
  - α_i: skręcenie członu
  - d_i: odsunięcie przegubu
  - θ_i: kąt przegubu
- Ponieważ każda macierz A_i jest funkcją tylko jednej zmiennej, dla danego członu trzy z tych parametrów będą stałe.
  - d_i będą zmienne dla przegubów pryzmatycznych, a θ_i będą zmienne dla przegubów obrotowych
- Stwierdziliśmy jednak, że podanie położenia i orientacji każdego ciała sztywnego wymaga 6 parametrów:
  - trzech kątów (np. kąty Eulera) oraz trójelementowego wektora położenia.
  - Jak więc można mówić tylko o czterech parametrach 4 DH?...

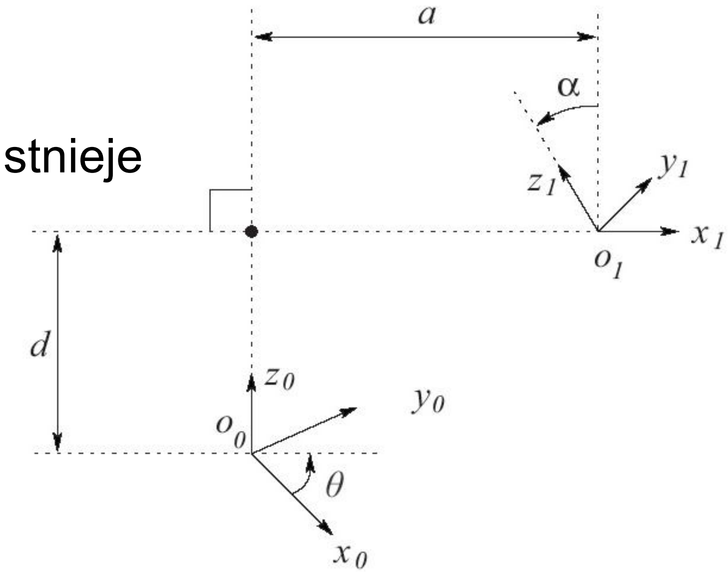
Istnienie i jednoznaczność

- Kiedy możemy reprezentować przekształcenie jednorodne stosując cztery parametru DH?
- Przykładowo, rozważmy dwa układy współrzędnych o_0 oraz o_1.
  - Istnieje jednoznaczne przekształcenie jednorodne miedzy tymi układami.
- Teraz przyjmijmy dwa założenia:
  1. DH1: $\hat{x}_1 \perp \hat{z}_0$
  2. DH2: $\hat{x}_1 \cap \hat{z}_0$
- Jeżeli są spełnione, twierdzimy, że istnieje

jednoznaczne przekształcenie A:

$$A = \mathbf{Rot}_{z,\theta}\mathbf{Trans}_{z,d}\mathbf{Trans}_{x,a}\mathbf{Rot}_{x,\alpha}$$

$$= \begin{bmatrix} R_1^0 & o_1^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Istnienie i jednoznaczność

- Dowód:
  1. Zakładamy, że R_1^0 ma postać $R_1^0 = R_{z,\theta} R_{x,\alpha}$
  2. Użyjmy DH1 do sprawdzenia postaci R_1^0

$$\hat{x}_1 \perp \hat{z}_0 \Rightarrow x_1^0 \cdot z_0^0 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = r_{31} = 0 \longrightarrow R_1^0 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ 0 & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

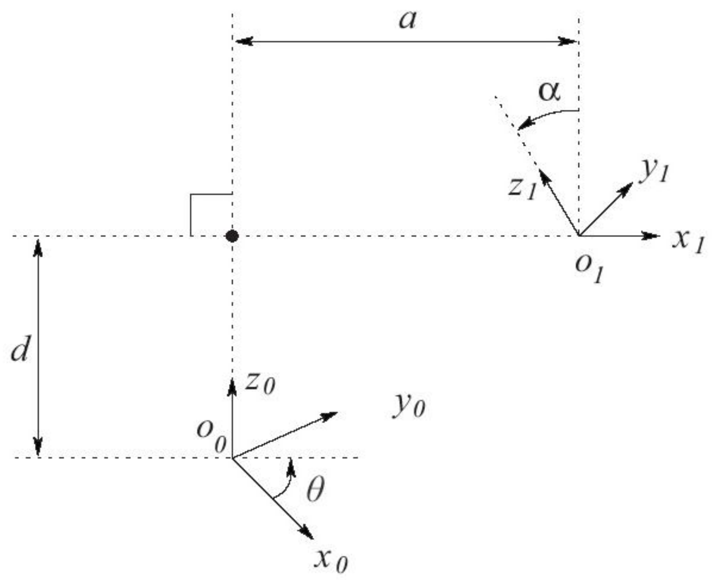
  - Wiersze i kolumny R_1^0 są wektorami jednostkowymi: $\longrightarrow$ $r_{11}{}^2 + r_{21}{}^2 = 1$, $r_{32}{}^2 + r_{33}{}^2 = 1$
  - Pozostałe elementy R_1^0 wynikają z własności macierzy obrotu.
  - Zatem nasze założenie, że istnieje jednoznaczne θ oraz α dające R_1^0 jest poprawne po spełnieniu DH1.

Istnienie i jednoznaczność

- Dowód:
  1. Użyjmy DH2 do określenie postaci o_1^0.
  - Ponieważ dwie osie przecinają się, przesunięcie między dwoma rozważanymi układami współrzędnych można przedstawić jako liniową kombinację tych dwóch osi (w obrębie płaszczyzny utworzonej przez x_1 i z_0)

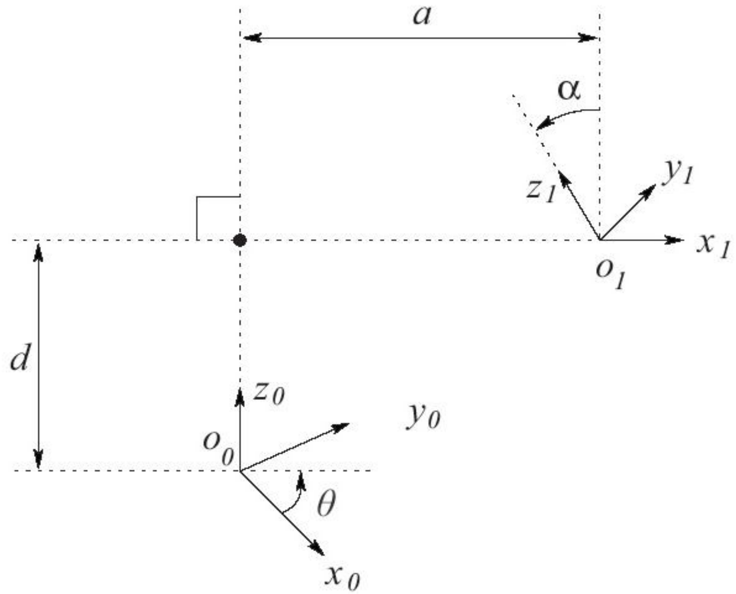
$$\hat{x}_1 \cap \hat{z}_0 \Rightarrow o_1^0 = dz_0^0 + ax_1^0$$

$$\Rightarrow o_1^0 = d\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + a\begin{bmatrix}c_\theta\\s_\theta\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ac_\theta\\as_\theta\\d\end{bmatrix}$$

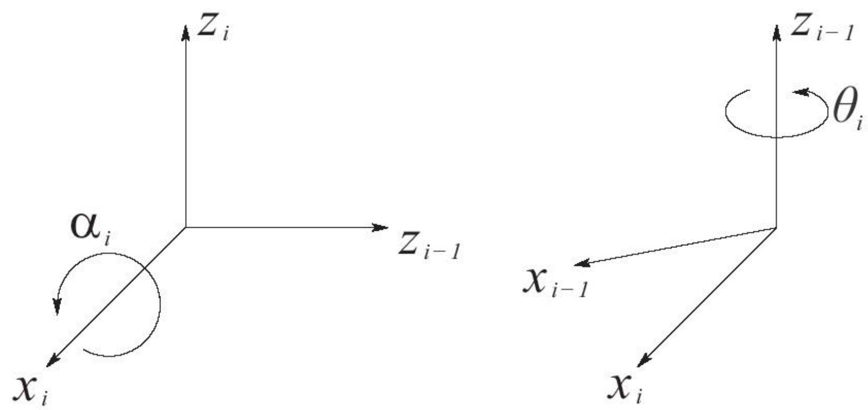


Interpretacja fizyczna parametrów DH

- a_i: długość członu, odległość między osiami z_0 i z_1 (wzdłuż x_1)
- α_i: skręcenie członu, kąt między z_0 i z_1 (mierzony wokół x_1)
- d_i: odsunięcie przegubu, odległość między o_0 a przecięciem osi z_0 i x_1 (wzdłuż z_0)
- θ_i: kąt przegubu, kąt między x_0 i x_1 (mierzony wokół z_0)



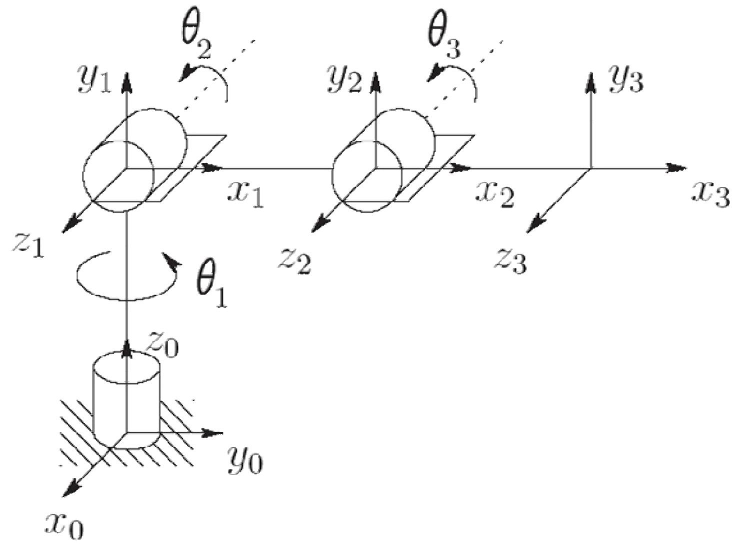
Znaki kątów:



Przypisywanie układów współrzędnych

- Dla dowolnego manipulatora *n*-członowego, można zawsze wybrać układy współrzędnych pozwalające spełnić DH1 and DH2.
  - Wybór nie jest jednoznaczny, ale końcowy rezultat będzie zawsze taki sam.

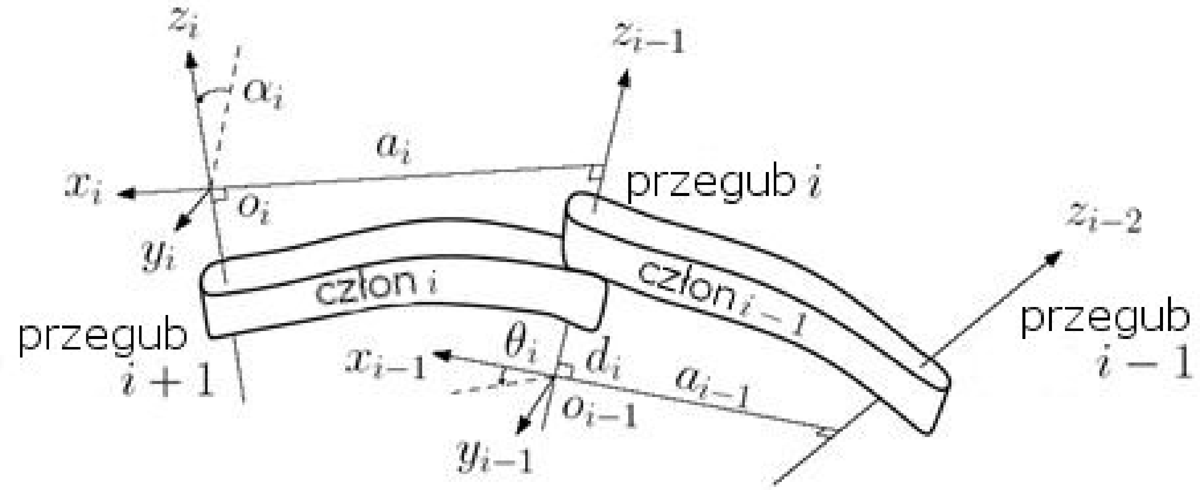
1. Wybierz z_i jako oś obrotu przegubu i+1
   - z_0 jest osią obrotu przegubu 1, z_1 jest osią obrotu przegubu 2, itd.
   - Gdy przegub i+1 jest obrotowy, z_i jest osią obrotu przegubu i+1.
   - Gdy przegub i+1 jest pryzmatyczny, z_i jest osią przesunięcia dla przegubu i+1.



Przypisywanie układów współrzędnych

2. Przypisz układ bazowy
   – Początkiem może być dowolny punkt na osi z_0.
3. Wybierz x_0, y_0 dające układ prawoskrętny.
4. Rozpoczynamy iteracyjny proces definiowania układu i względem i-1:
   – Rozważamy trzy przypadki związków z_{i-1} i z_i:
   i. z_{i-1} i z_i nie leżą w jednej płaszczyźnie
   ii. z_{i-1} i z_i przecinają się
   iii. z_{i-1} i z_i są równoległe

$\left.\begin{array}{l}\text{ii.}\\\text{iii.}\end{array}\right\}$ z_{i-1} i z_i leżą w jednej płaszczyźnie



Przypisywanie układów współrzędnych

i. z_{i-1} i z_i nie leżą w jednej płaszczyźnie
   - Istnieje (i jest tylko jeden) najkrótszy odcinek łączący obie osie.
   - Wybierz ten odcinek do wyznaczenia kierunku osi x_i
     - o_i leży na przecięciu z_i i x_i
   - Wybierz y_i na podstawie reguły prawej dłoni.

Przypisywanie układów współrzędnych

ii. z_{i-1} i z_i przecinają się
   - Jako oś x_i wybierz normalną do płaszczyzny wyznaczonej przez z_i i z_{i-1}
     - o_i leży na przecięciu z_i i x_i
   - Wybierz y_i wg reguły prawej dłoni.

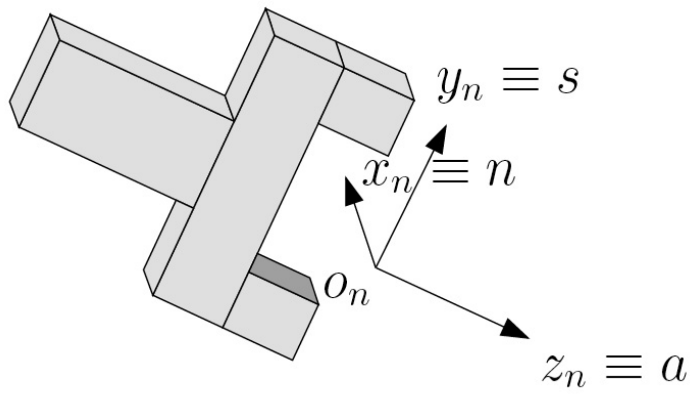
Przypisywanie układów współrzędnych

iii. z_{i-1} i z_i są równoległe

- Istnieje nieskończenie wiele odcinków normalnych do z_i oraz z_{i-1} i łączących te osie. Mają one jednakową długość.
- Można wybrać o_i gdziekolwiek na z_i, jednak gdy wybierzemy x_i wzdłuż normalnej przechodzącej przez punkt o_{i-1}, odpowiednia odległość d_i będzie zerowa.
- Wybierz y_i wg reguły prawej ręki.

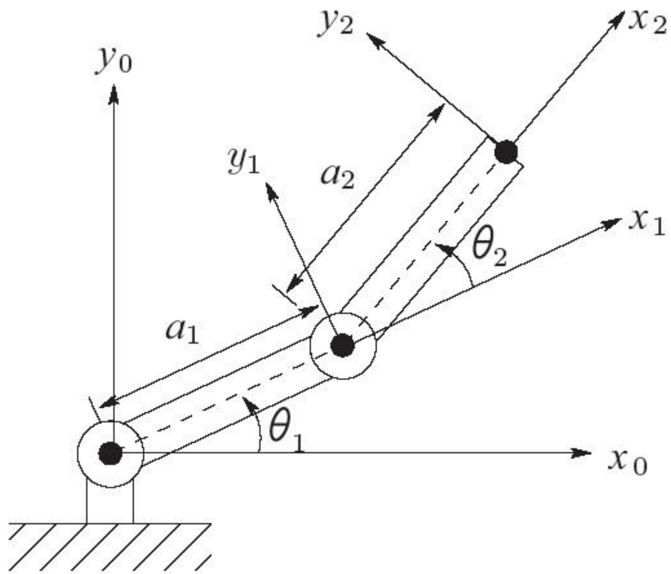
Przypisywanie układu końcówki roboczej

- Poprzednie przypisania obowiązują aż do układu *n*-1.
  - Przypisanie układu narzędzia najczęściej definiuje się osiami *n*, *s*, *a*:
    - *a* jest kierunkiem zbliżania (*ang.* approach direction);
    - *s* jest kierunkiem przesuwania (*ang.* sliding direction); w tym kierunku przesuwają się palce typowego chwytaka podczas zamykania i otwierania;
    - *n* jest kierunkiem normalnym (*ang.* normal) do płaszczyzny wyznaczonej przez *a* i *s.*



Przykład 1: dwuczłonowy manipulator planarny

- 2 stopnie swobody: należy przypisać trzy układy współrzędnych
  1. Wybierz oś z_0 (oś obrotu przegubu 1, układ bazowy)
  2. Wybierz oś z_1 (oś obrotu przegubu 2)
  3. Wybierz oś z_2 (układ końcówki roboczej)
     - Dla tego przypadku jest dowolny ponieważ nie opisano żadnej kiści/chwytaka.
     - W takim razie, zdefiniujmy z_2 jako równoległą do z_1 i z_0 (dla jednolitości).
  4. Wybierz osie x_i
     - Wszystkie osie z_i są równoległe.
     - Wybierzmy więc x_i tak, by przeciąć o_{i-1}.

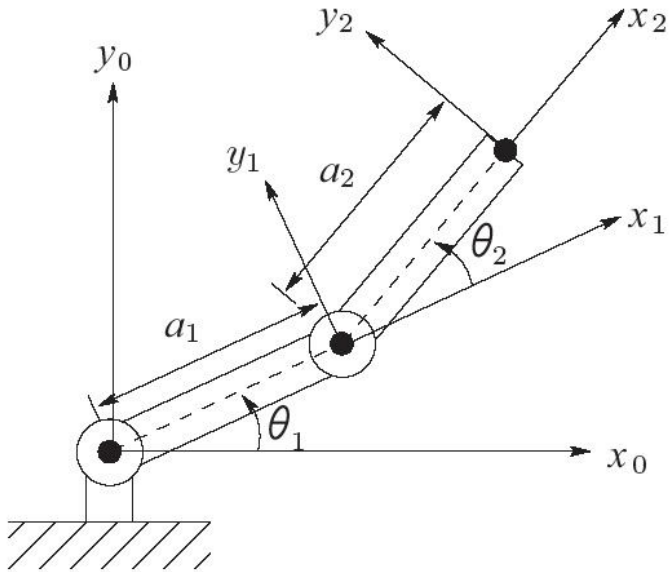


Przykład 1: dwuczłonowy manipulator planarny

- Zdefiniujmy parametry DH
  - najpierw zdefiniujmy stałe parametry a_i, α_i;
  - dalej, zdefiniujmy zmienne parametry θ_i, d_i;

człon	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2

  - α_i są zerowe bo wszystkie z_i są równoległe;
  - Zatem tylko θ_i są zmienne.



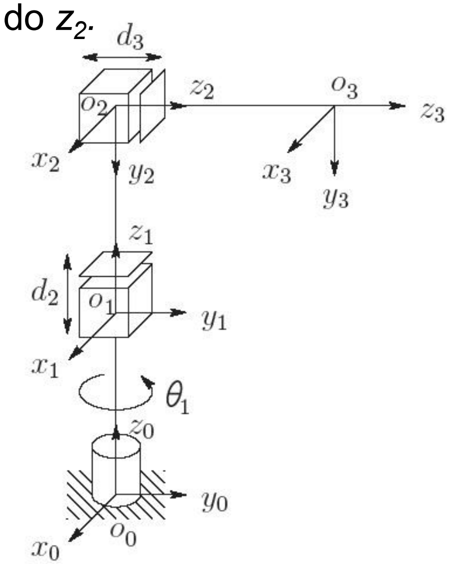
$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1^0 = A_1$$

$$T_2^0 = A_1A_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przykład 2: trójczłonowy robot cylindryczny

- 3 stopnie swobody: należy przypisać cztery układy współrzędnych.
  1. Wybierz oś z_0 (oś obrotu przegubu 1, układ bazowy).
  2. Wybierz oś z_1 (oś przesunięcia przegubu 2).
  3. Wybierz oś z_2 (oś przesunięcia przegubu 3).
  4. Wybierz oś z_3 (układ końcówki roboczej)
     - Wybór jest znowu dowolny, bo nie opisujemy ani kiści, ani chwytaka.
     - Zamiast tego, definiujemy z_3 jako równoległą do z_2.



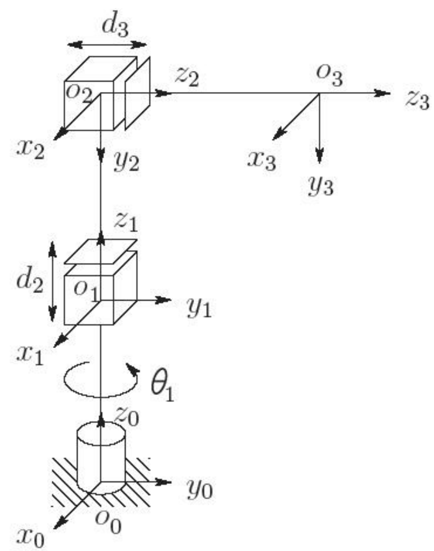
Przykład 2: trójczłonowy robot cylindryczny

- Zdefiniujmy parametry DH:
  - najpierw, zdefiniujmy stałe parametry a_i, α_i;
  - potem, zdefiniujmy zmienne parametry θ_i, d_i.

człon	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	θ_1
2	0	-90	d_2	0
3	0	0	d_3	0

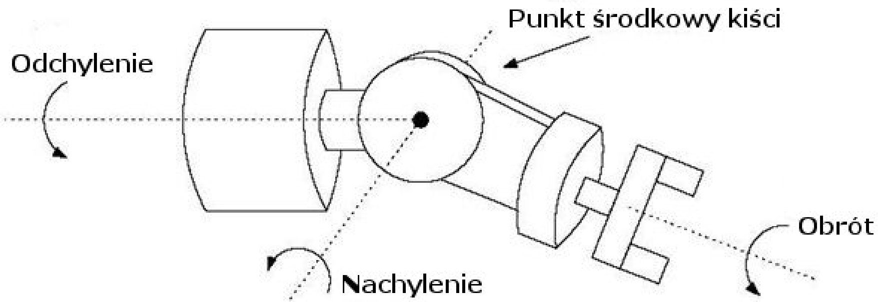
$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

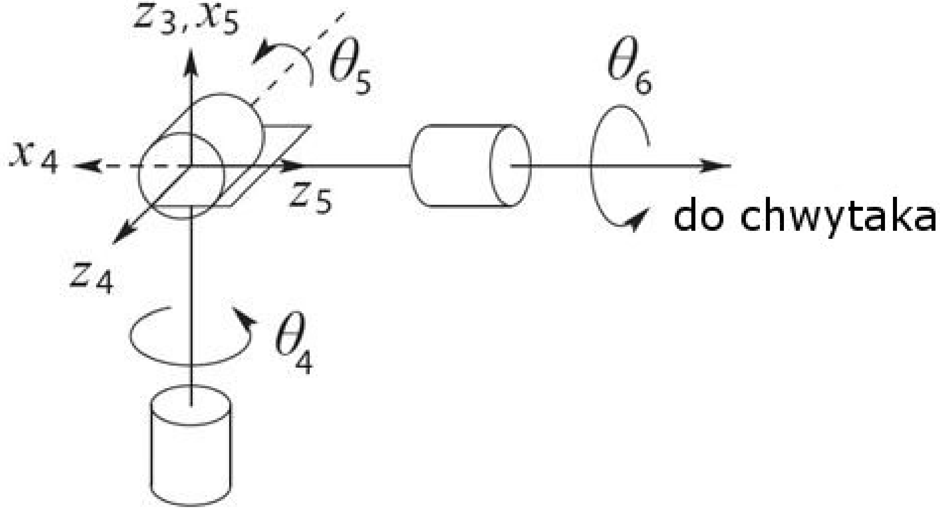
$$T_3^0 = A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & -s_1 d_3 \\ s_1 & 0 & c_1 & c_1 d_3 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Przykład 3: kiść sferyczna

- 3 stopnie swobody: należy przypisać cztery układy współrzędnych
  - odchylenie, nachylenie, obrót (θ_4, θ_5, θ_6) wszystkie przecinające się w jednym punkcie *o* (punkt środkowy kisci)





Przykład 3: kiść sferyczna

- Zdefiniujmy parametry DH:
  - najpierw, stałe parametry a_i, α_i;
  - potem, zmienne parametry θ_i, d_i.

człon	a_i	α_i	d_i	θ_i
4	0	-90	0	θ_4
5	0	90	0	θ_5
6	0	0	d_6	θ_6

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & -s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_6^3 = A_4 A_5 A_6 = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 & c_4s_5d_6 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 & s_4s_5d_6 \\ -s_5c_6 & s_5c_6 & c_5 & c_5d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$