



# Kinematyka prosta i odwrotna

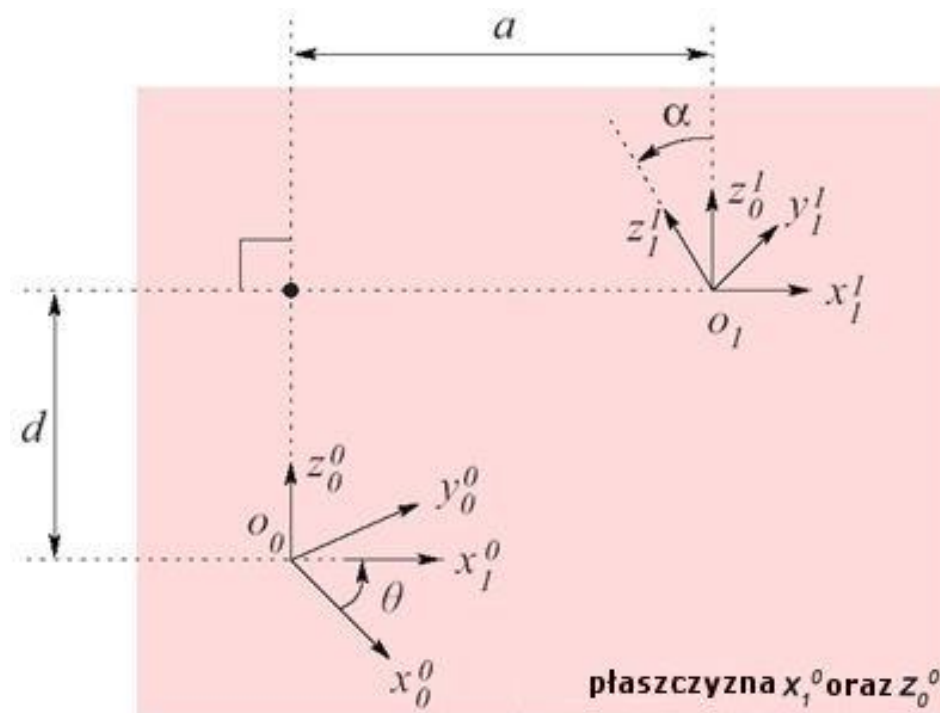
## Przypomnienie: reprezentacja Denavita-Hartenberga

- Reprezentowanie każdego pojedynczego przekształcenia jednorodnego jako iloczynu czterech przekształceń bazowych:

$$\begin{aligned}
 A_i &= \mathbf{Rot}_{z,\theta_i} \mathbf{Trans}_{z,d_i} \mathbf{Trans}_{x,a_i} \mathbf{Rot}_{x,\alpha_i} \\
 &= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} c_{\alpha_i} & s_{\theta_i} s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i} s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

## Przypomnienie: podstawa fizyczna parametrów DH

- $a_i$ : długość członu, odległość między  $o_0$  oraz  $o_1$  (zrzucona na  $x_1$ )
- $\alpha_i$ : skręcenie członu, kąt między  $z_0$  oraz  $z_1$  (mierzony wokół  $x_1$ )
- $d_i$ : odsunięcie przegubu, odległość między  $o_0$  oraz  $o_1$  (zrzucona na  $z_0$ )
- $\theta_i$ : kąt przegubu, kąt między  $x_0$  oraz  $x_1$  (mierzony wokół  $z_0$ )



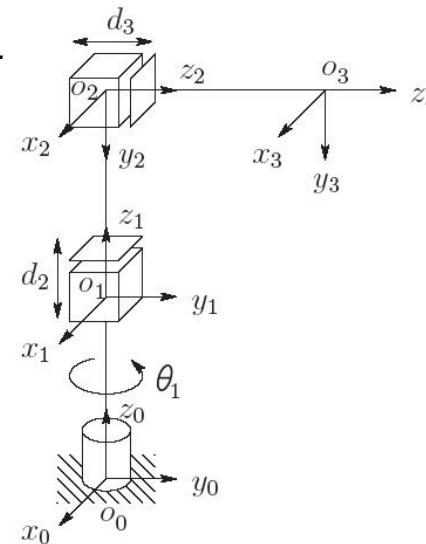


## Algorytm rozwiązujący kinematykę prostą

1. Oznacz osie przegubów jako  $z_0, \dots, z_{n-1}$  (oś  $z_i$  jest osią przegubu  $i+1$ ).
2. Przyjmij bazowy układ współrzędnych: początek  $o_0$  umieść dowolnie na  $z_0$  i wybierz  $x_0$  oraz  $y_0$  tak, aby układ był prawoskrętny.
3. Dla  $i=1:n-1$ ,
  - i. Umieść  $o_i$  w miejscu, gdzie wspólna normalna do osi  $z_i$  i  $z_{i-1}$  przecina  $z_i$ . Jeśli  $z_i$  przecina  $z_{i-1}$ , to umieść  $o_i$  w tym przecięciu. Jeśli  $z_i$  i  $z_{i-1}$  są równoległe, to umieść  $o_i$  na  $z_i$  tak, aby zachodziło  $d_i=0$ .
  - ii. Przyjąć  $x_i$  wzdłuż wspólnej normalnej osi  $z_i$  i  $z_{i-1}$  przechodzącej przez  $o_i$ , lub w kierunku normalnej do płaszczyzny obu tych osi jeśli się one przecinają.
  - iii. Wybrać  $y_i$  tak, aby układ był prawoskrętny.
4. Ustal układ końcówki roboczej: wybierz  $z_n$  równoległe do  $z_{n-1}$ .
5. Dla  $i=1:n$ , wypełnij tabelę parametrów DH.
6. Zbuduj macierze przekształceń jednorodnych  $A_i$ .
7. Utwórz macierz  $T_n^0$  opisującą pozycję i orientację układu narzędzia wyrażoną w bazowym układzie współrzędnych.

## Przykład 2: trójczłonowy robot cylindryczny

- 3 stopnie swobody: należy przypisać cztery układy współrzędnych
  1. Wybierz oś  $z_0$  (oś obrotu przegubu 1, układ bazowy)
  2. Wybierz oś  $z_1$  (oś translacji dla przegubu 2)
  3. Wybierz oś  $z_2$  (oś translacji dla przegubu 3)
  4. Wybierz oś  $z_3$  (układ narzędzia)
    - Jest to w tym przypadku ponownie arbitralne, bo nie opisaliśmy żadnej kiści/chwytnika.
    - Zamiast tego, zdefiniujmy  $z_3$  równoległe do  $z_2$ .





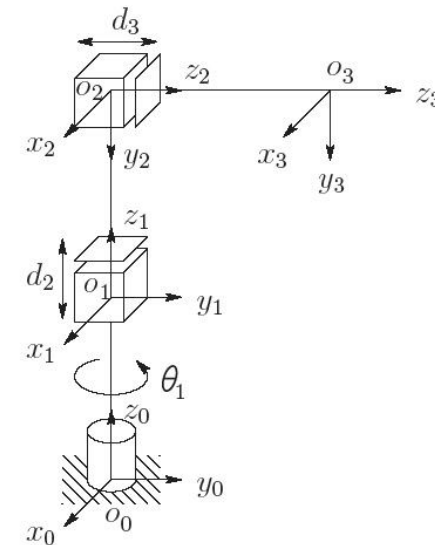
## Przykład 2: trójczłonowy robot cylindryczny

- Teraz zdefiniujemy parametry DH
  - Najpierw, zdefiniujemy stałe parametry  $a_i, \alpha_i$
  - Potem, zdefiniujemy zmienne parametry  $\theta_i, d_i$

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

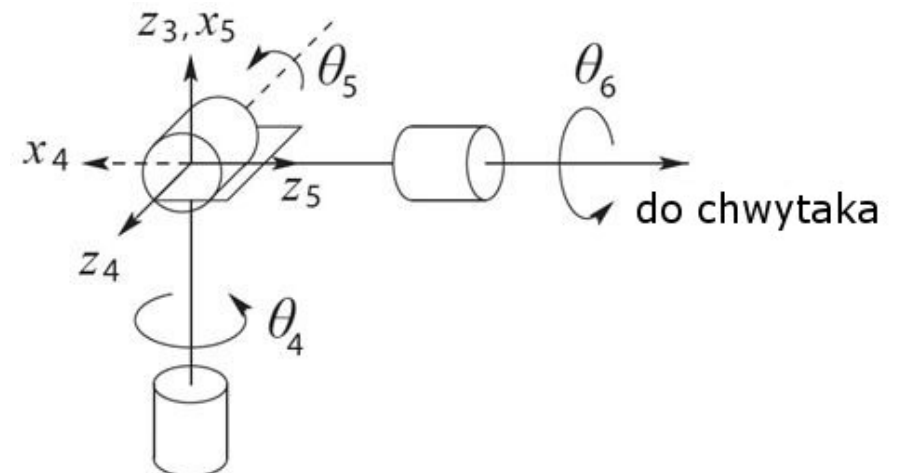
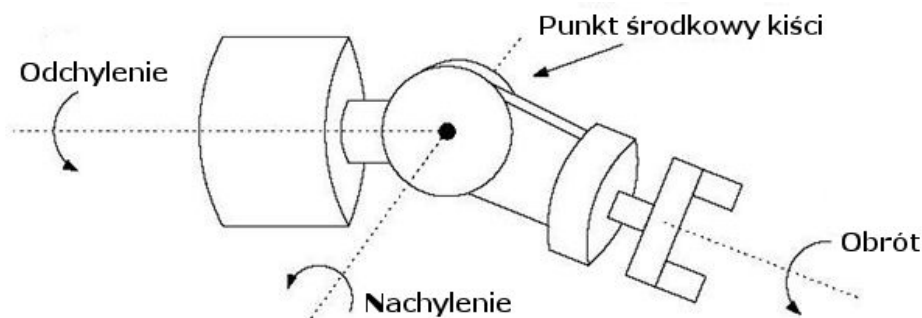
$$T_3^0 = A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & -s_1 d_3 \\ s_1 & 0 & c_1 & c_1 d_3 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

człon	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	$d_1$	$\theta_1$
2	0	-90	$d_2$	0
3	0	0	$d_3$	0



## Example 3: kiść sferyczna

- 3 stopnie swobody: należy przypisać cztery układy współrzędnych
  - Osie odchylenia, nachylenia i obrotu ( $\theta_4$ ,  $\theta_5$ ,  $\theta_6$ ) wszystkie przecinają się w punkcie  $o$  (środek kiści)
  - 1. Wybierz oś  $z_3$  (oś obrotu przegubu 4)
  - 2. Wybierz oś  $z_4$  (oś obrotu przegubu 5)
  - 3. Wybierz oś  $z_5$  (oś obrotu przegubu 6)
  - 4. Wybierz układ narzędzia:
    - $z_6$  ( $a$ ) jest współliniowa z  $z_5$
    - $y_6$  ( $s$ ) jest kierunkiem zamykania się chwytaka
    - $x_6$  ( $n$ ) wybiera się wg reguły prawej dłoni



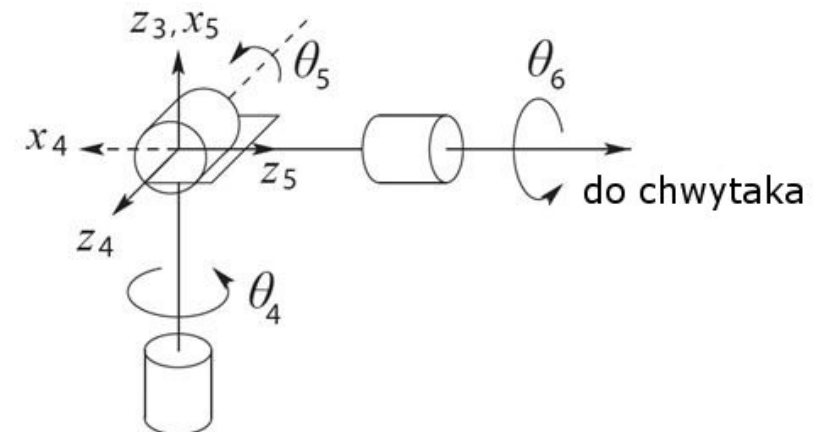
## Przykład 3: kiść sferyczna

- Teraz zdefiniujemy parametry DH
  - Najpierw, zdefiniujemy stałe parametry  $a_i, \alpha_i$
  - Następnie, zdefiniujemy zmienne parametry  $\theta_i, d_i$

człon	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
4	0	-90	0	$\theta_4$
5	0	90	0	$\theta_5$
6	0	0	$d_6$	$\theta_6$

$$A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & -s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_6^3 = A_4 A_5 A_6 = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & c_4 s_5 d_6 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & s_4 s_5 d_6 \\ -s_5 c_6 & s_5 c_6 & c_5 & c_5 d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

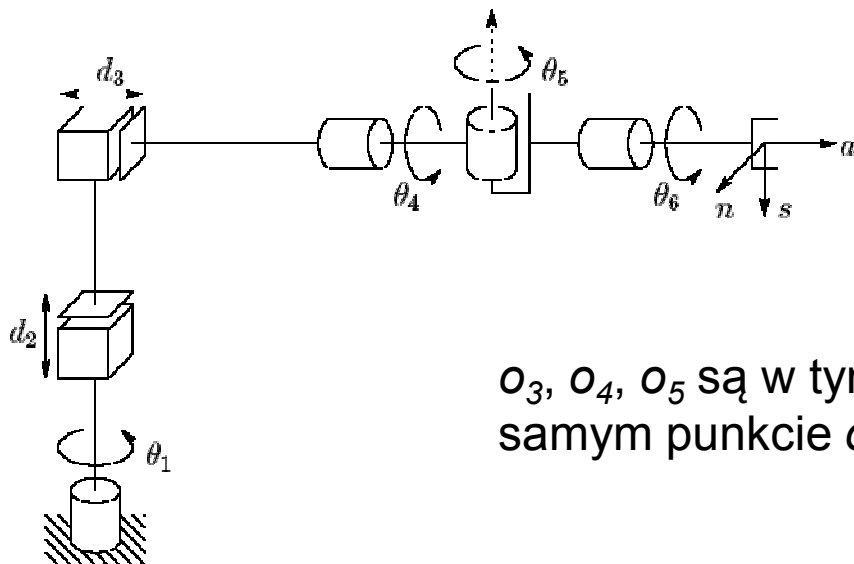






## Przykład 4: robot cylindryczny z końcówką sferyczną

- 6 stopni swobody: należy przypisać siedem układów współrzędnych
  - Ale już to zrobiliśmy w poprzednich dwóch przykładach, więc można od razu wypełnić tabelę parametrów DH parameters:

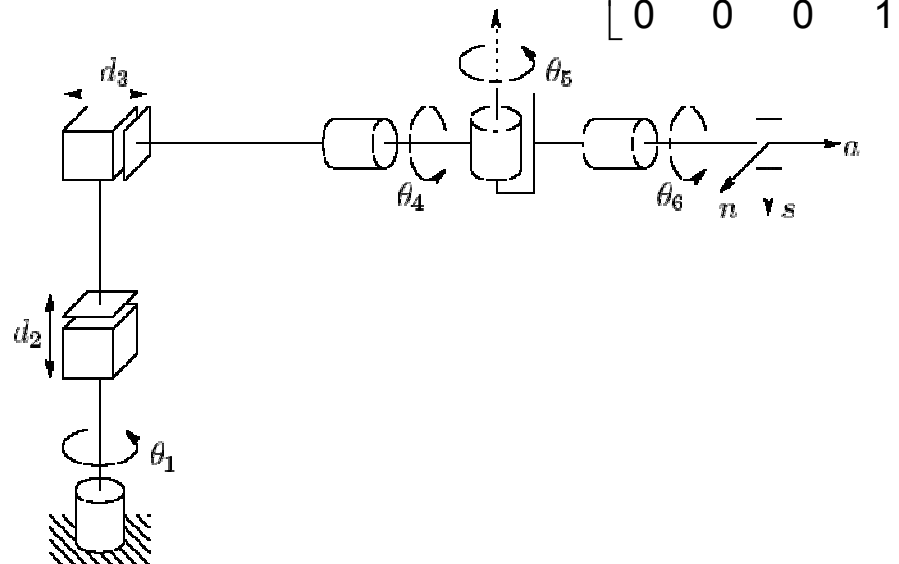


$o_3, o_4, o_5$  są w tym samym punkcie  $o_c$

człon	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	$d_1$	$\theta_1$
2	0	-90	$d_2$	0
3	0	0	$d_3$	0
4	0	-90	0	$\theta_4$
5	0	90	0	$\theta_5$
6	0	0	$d_6$	$\theta_6$

## Przykład 4: robot cylindryczny z końcówką sferyczną

- Zauważmy, że  $z_3$  (oś przegubu 4) jest współliniowa z  $z_2$  (oś przegubu 3), więc możemy dokonać następującego połączenia:



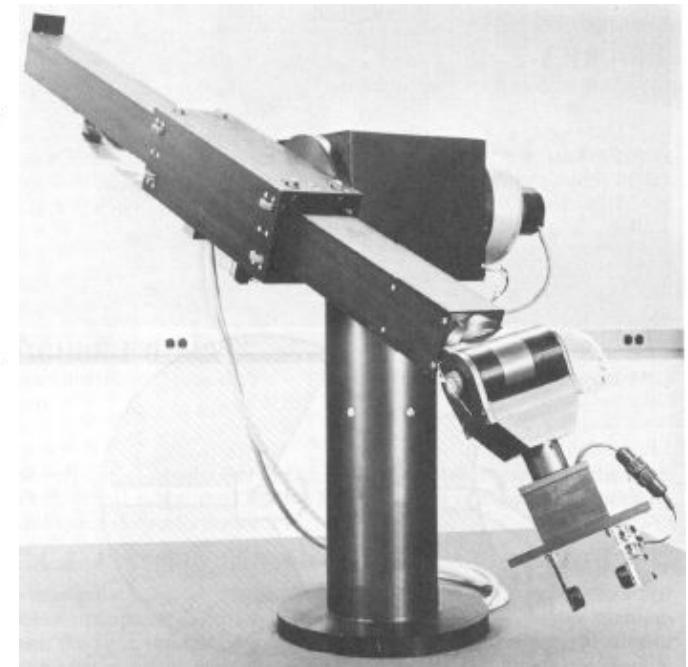
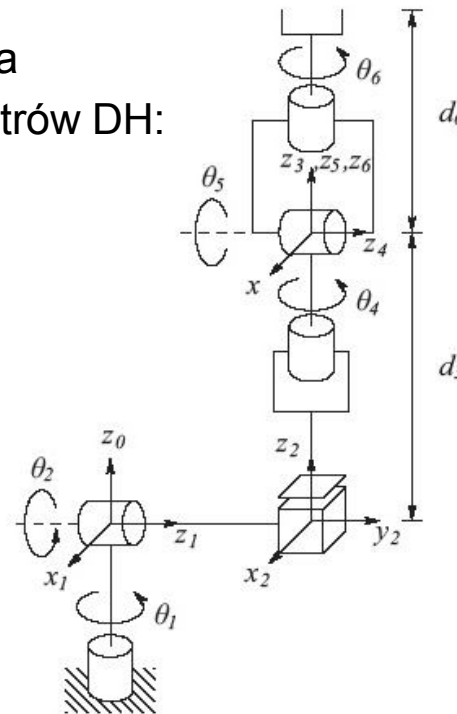
$$T_6^0 = T_3^0 T_6^3 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & d_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & d_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11} = c_1 c_4 c_5 c_6 - c_1 s_4 s_6 + s_1 s_5 c_6 \\ r_{21} = s_1 c_4 c_5 c_6 - s_1 s_4 s_6 - c_1 s_5 c_6 \\ r_{31} = -s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 \\ r_{12} = -c_1 c_4 c_5 s_6 - c_1 s_4 c_6 - s_1 s_5 c_6 \\ r_{22} = -s_1 c_4 c_5 s_6 - s_1 s_4 s_6 + c_1 s_5 c_6 \\ r_{32} = s_4 c_5 c_6 - c_4 c_6 \\ r_{13} = c_1 c_4 s_5 - s_1 c_5 \\ r_{23} = s_1 c_4 s_5 + c_1 c_5 \\ r_{33} = -s_4 s_5 \\ d_x = c_1 c_4 s_5 d_6 - s_1 c_5 d_6 - s_1 d_3 \\ d_y = s_1 c_4 s_5 d_6 + c_1 c_5 d_6 + c_1 d_3 \\ d_z = -s_4 s_5 d_6 + d_1 + d_2 \end{array} \right.$$

## Przykład 5: manipulator stanfordzki

- 6 stopni swobody: należy przypisać siedem układów współrzędnych:
  - Wybierz oś  $z_0$  (oś obrotu przegubów 1, układ bazowy)
  - Wybierz osie  $z_1$ - $z_5$  (osie obrotu/przesunięcia dla przegubów 2-6)
  - Wybierz osie  $x_i$
  - Wybierz układ narzędzia
  - Wypełnij tabelę parametrów DH:

człon	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	-90	0	$\theta_1$
2	0	90	$d_2$	$\theta_2$
3	0	0	$d_3$	0
4	0	-90	0	$\theta_4$
5	0	90	0	$\theta_5$
6	0	0	$d_6$	$\theta_6$



## Przykład 5: manipulator stanfordzki

- Teraz określ poszczególne przekształcenia jednorodne:

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## Przykład 5: manipulator stanfordzki

- W końcu, złoż wszystkie przekształcenia w celu uzyskania pełnego opisu kinematyki prostej:

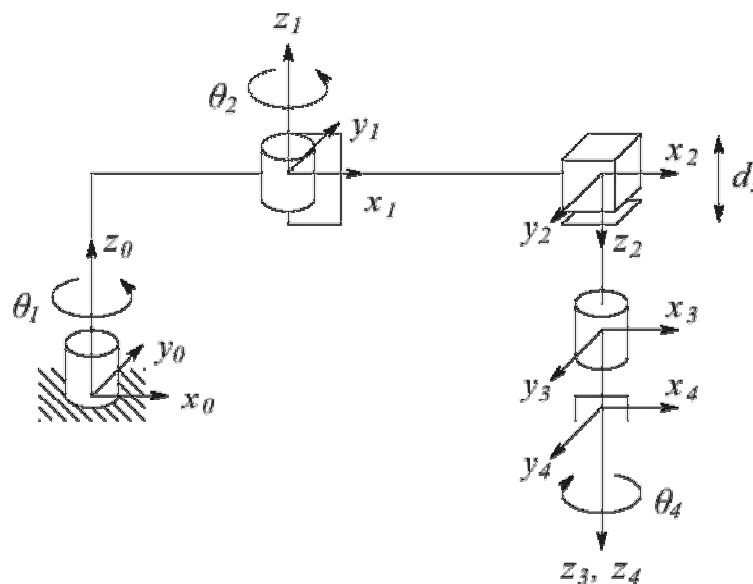
$$T_6^0 = A_1 \cdots A_6 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & d_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & d_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11} = c_1 [c_2 (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_2 s_5 c_6] - d_2 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\ r_{21} = s_1 [c_2 (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_2 s_5 c_6] + c_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\ r_{31} = -s_2 (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - c_2 s_5 c_6 \\ r_{12} = c_1 [-c_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_2 s_5 s_6] - s_1 (-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) \\ r_{22} = -s_1 [-c_2 (c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6) - s_2 s_5 s_6] + c_1 (-s_4 c_5 s_6 + c_4 s_6) \\ r_{32} = s_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + c_2 s_5 s_6 \\ r_{13} = c_1 (c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) - s_1 s_4 s_5 \\ r_{23} = s_1 (c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) + c_1 s_4 s_5 \\ r_{33} = -s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5 \\ d_x = c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 + d_6 (c_1 c_2 c_4 s_5 + c_1 c_5 s_2 - s_1 s_4 s_5) \\ d_y = s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 + d_6 (c_1 s_4 s_5 + c_2 c_4 s_1 s_5 + c_5 s_1 s_2) \\ d_z = c_2 d_3 + d_6 (c_2 c_5 - c_4 s_2 s_5) \end{array} \right.$$

## Przykład 6: manipulator SCARA

- 4 stopnie swobody: należy przypisać pięć układów współrzędnych:
  1. Wybierz oś  $z_0$  (oś obrotu przegubu 1, układ bazowy)
  2. Wybierz osie  $z_1$ - $z_3$  (osie obrotu/przesunięcia przegubów 2-4)
  3. Wybierz osie  $x_i$
  4. Wybierz układ końcówki roboczej
  5. Wypełnij tabelę parametrów DH:

człon	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	$a_1$	0	0	$\theta_1$
2	$a_2$	180	0	$\theta_2$
3	0	0	$d_3$	0
4	0	0	$d_4$	$\theta_4$



## Przykład 6: manipulator SCARA

- Teraz określmy poszczególne przekształcenia jednorodne:

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & -c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_4^0 = A_1 \cdots A_4 = \begin{bmatrix} c_{12}c_4 + s_{12}s_4 & -c_{12}s_4 + s_{12}c_4 & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ s_{12}c_4 - c_{12}s_4 & -s_{12}s_4 - c_{12}c_4 & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## Kinematyka odwrotna

- Znaleźć wartości zmiennych przegubowych, które doprowadzą układ narzędzia do zadanej pozycji i orientacji (w przestrzeni roboczej)

- Mając dane  $H$ :
$$H = \begin{bmatrix} R & o \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$$

- znaleźć *wszystkie* rozwiązania równania

$$T_n^0(q_1, \dots, q_n) = H$$

- Zauważając, że

$$T_n^0(q_1, \dots, q_n) = A_1(q_1) \cdots A_n(q_n)$$

- daje to 12 (nietrywialnych) równań o  $n$  niewiadomych.





## Przykład: manipulator stanfordzki

- Dla zadanego  $H$ :

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -0.154 \\ 0 & 0 & 1 & 0.763 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

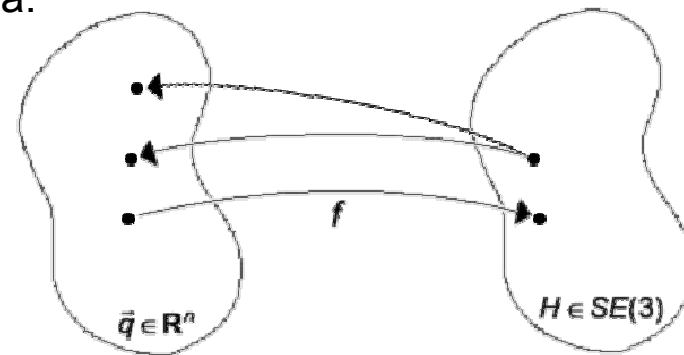
- znaleźć  $\theta_1, \theta_2, d_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ :

$$\begin{aligned} c_1[c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] - d_2(s_4c_5c_6 + c_4s_6) &= 0 \\ s_1[c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] + c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) &= 0 \\ -s_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_2s_5c_6 &= 1 \\ c_1[-c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6] - s_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6) &= 1 \\ -s_1[-c_2(c_4c_5s_6 - s_4c_6) - s_2s_5s_6] + c_1(-s_4c_5s_6 + c_4s_6) &= 0 \\ s_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + c_2s_5s_6 &= 0 \\ c_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) - s_1s_4s_5 &= 0 \\ s_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) + c_1s_4s_5 &= 1 \\ -s_2c_4s_5 + c_2c_5 &= 0 \\ c_1s_2d_3 - s_1d_2 + d_6(c_1c_2c_4s_5 + c_1c_5s_2 - s_1s_4s_5) &= -0.154 \\ s_1s_2d_3 + c_1d_2 + d_6(c_1s_4s_5 + c_2c_4s_1s_5 + c_5s_1s_2) &= 0.763 \\ c_2d_3 + d_6(c_2c_5 - c_4s_2s_5) &= 0 \end{aligned}$$

- Jedno z rozwiązań:  $\theta_1 = \pi/2, \theta_2 = \pi/2, d_3 = 0.5, \theta_4 = \pi/2, \theta_5 = 0, \theta_6 = \pi/2$

## Kinematyka odwrotna

- Poprzedni przykład pokazuje jak trudno byłoby otrzymać rozwiązanie analityczne 12 równań.
- Zamiast tego, rozwija się systematyczne metody oparte o konfigurację manipulatorów.
- Dla kinematyki prostej zawsze istnieje jednoznaczne rozwiązanie
  - Potencjalnie skomplikowane funkcje nieliniowe
- Kinematyka odwrotna może, ale nie musi, posiadać rozwiązanie
  - Rozwiązania mogą, ale nie muszą, być jednoznaczne.
  - Rozwiązania mogą naruszać ograniczenia.
- Rozwiązania analityczne są idealne!





## Ogólny zarys: odsprężenie kinematyczne

- Stosuje się do układów posiadających ramię z kiścią
  - takich, że osie przegubów kiści przecinają się w jednym punkcie.
- Dla takich układów, można problem kinematyki odwrotnej można rozdzielić na dwa prostsze zadania:
  1. Kinematyka odwrotna pozycji: pozycja środka kiści
  2. Kinematyka odwrotna orientacji: orientacja kiści
- Najpierw, założmy 6 stopni swobody i że 3 ostatnie osie przecinają się w punkcie  $o_c$

$$R_6^0(q_1, \dots, q_6) = R$$

$$o_6^0(q_1, \dots, q_6) = o$$

- Użyjmy pozycji środka kiści do określenia pierwszych trzech kątów przegubów...

## Ogólny zarys: odsprężenie kinematyczne

- Początek  $o_6$  układu narzędzia jest przesunięty o odległość  $d_6$  wzdłuż osi  $z_5$  (bo  $z_5$  i  $z_6$  są współliniowe)
  - W ten sposób, 3. kolumna  $R$  jest kierunkiem  $z_6$  (wzgl. układu bazowego)

i możemy zapisać:

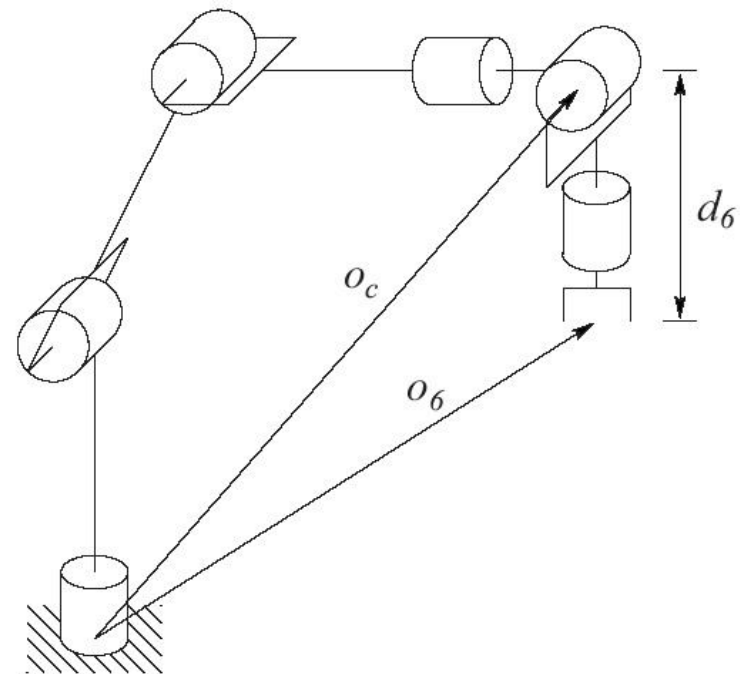
$$o = o_6^0 = o_c^o + d_6 R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Przekształcając:

$$o_c^o = o - d_6 R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Kładąc  $o = [o_x \ o_y \ o_z]^T$ ,  $o_c^o = [x_c \ y_c \ z_c]^T$

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o_x - d_6 r_{13} \\ o_y - d_6 r_{23} \\ o_z - d_6 r_{33} \end{bmatrix}$$



## Ogólny zarys: odsprężenie kinematyczne

- Ponieważ wektor  $[x_c \ y_c \ z_c]^T$  jest określony pierwszymi trzema kątami, wyrażenie na kinematykę prostą pozwala znaleźć pierwsze trzy kąty przegubowe niezależnie od wartości ostatnich trzech kątów.

- W ten sposób mamy teraz  $R_3^0$

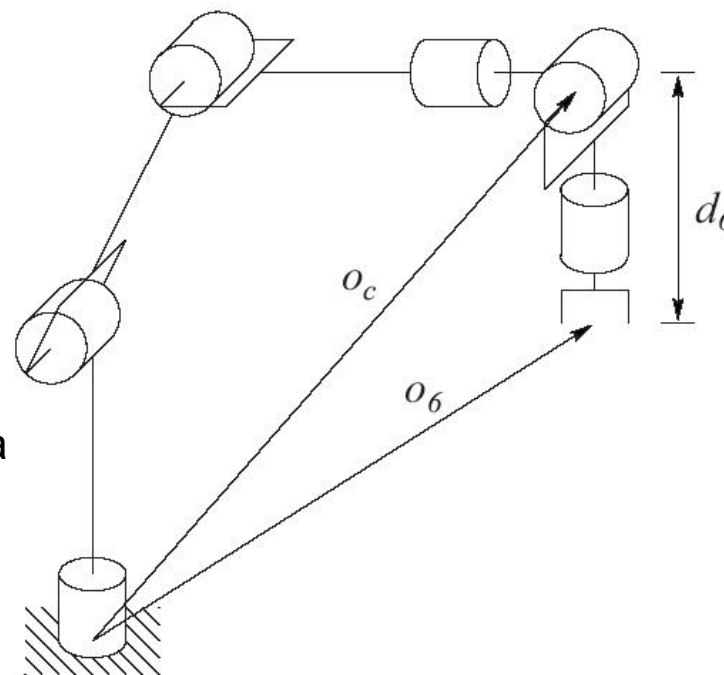
- Zauważmy, że

$$R = R_3^0 R_6^3$$

- Aby wyznaczyć ostatnie trzy kąty, mamy

$$R_6^3 = (R_3^0)^{-1} R = (R_3^0)^T R$$

- Ponieważ trzy ostatnie przeguby odpowiadają kiści sferycznej, do rozwiązania możemy użyć zestawu kątów Eulera.





## Kinematyka odwrotna pozycji

- Zauważmy, że teraz mamy  $[x_c \ y_c \ z_c]^T$  i potrzebujemy wartości  $q_1, q_2, q_3$ 
  - Znajdź  $q_i$  rzutując na płaszczyznę  $x_{i-1}, y_{i-1}$  i rozwiązując problem trygonometryczny.
  - Dwa przykłady: manipulatory stawowe (RRR) i sferyczne (RRP)
  - Przykładowo, dla manipulatora z łokciem, aby znaleźć  $\theta_1$ , zrzuć ramię na płaszczyznę  $x_0, y_0$

## Podstawa: dwuargumentowy arcus tangens

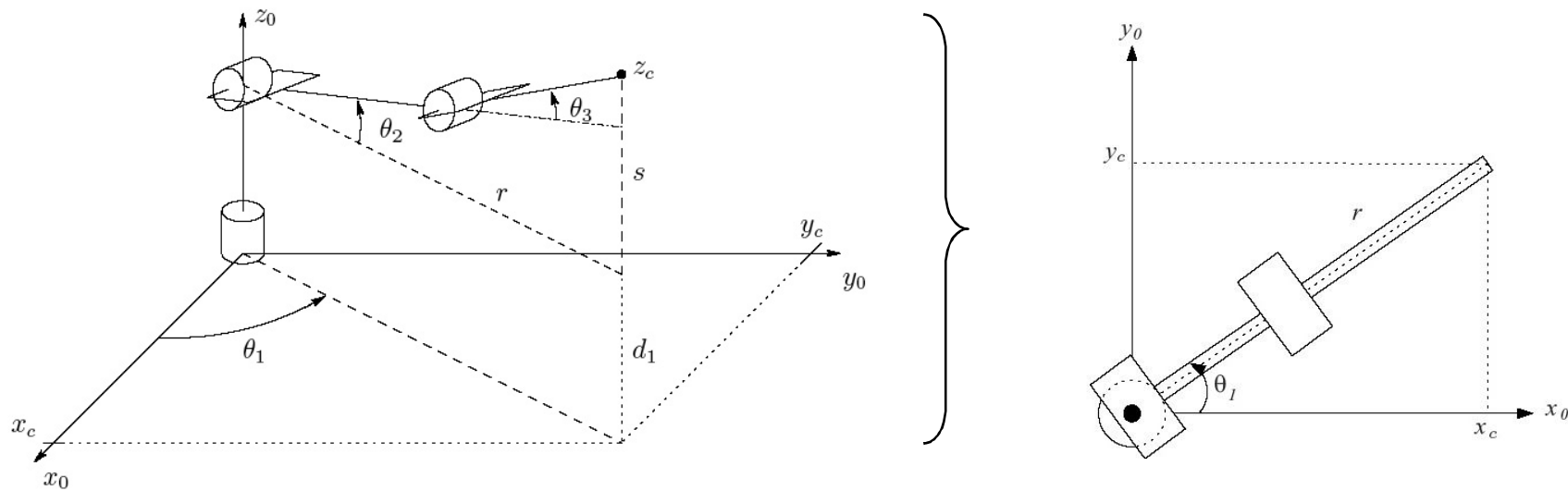
- Używamy  $\text{atan2}(\cdot)$  zamiast  $\text{atan}(\cdot)$  aby uwzględnić pełny zakres rozwiązań kątowych
  - Nazywany również „czteroćwiartkowym” arcusem tangensem

$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} -\text{atan2}(-y, x) & y < 0 \\ \pi - \text{atan}\left(-\frac{y}{x}\right) & y \geq 0, x < 0 \\ \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) & y \geq 0, x \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & y > 0, x = 0 \\ \text{undefined} & y = 0, x = 0 \end{cases}$$

## Przykład: manipulator RRR

1. Aby określić  $\theta_1$ , rzutujemy ramię na płaszczyznę  $x_0, y_0$

$$\theta_1 = \mathbf{atan2}(x_c, y_c)$$

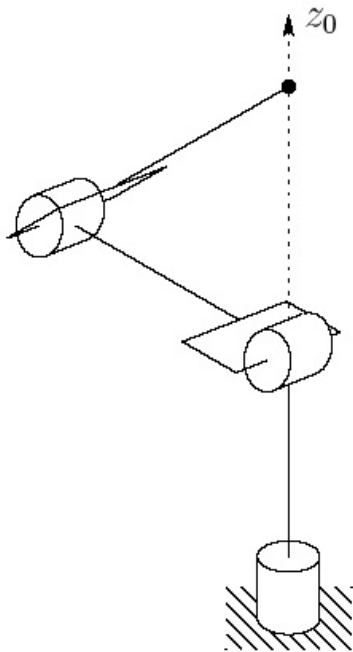


- Możemy również wziąć:  $\theta_1 = \pi + \mathbf{atan2}(x_c, y_c)$ 
  - Oczywiście, zmieni to rozwiązania dla  $\theta_2$  oraz  $\theta_3$

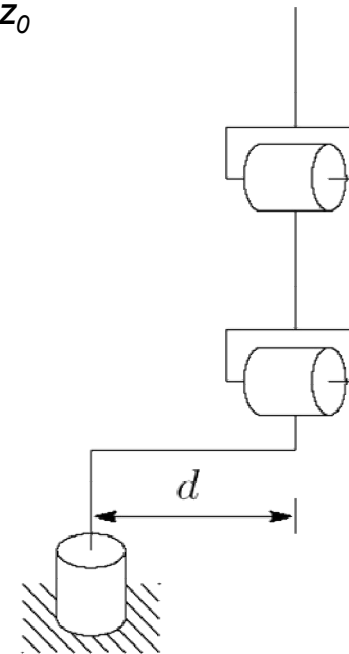


## Zastrzeżenia: konfiguracje osobliwe, przesunięcia

- Jeśli  $x_c=y_c=0$ ,  $\theta_1$  jest niezdefiniowany
  - tzn. dowolna wartość  $\theta_1$  zadziała



- Jeśli bark jest przesunięty, mamy dwa rozwiązania dla  $\theta_1$ : konfiguracje *lewego* i *prawego ramienia*
  - Jednak środek kiści nie może leżeć na osi  $z_0$



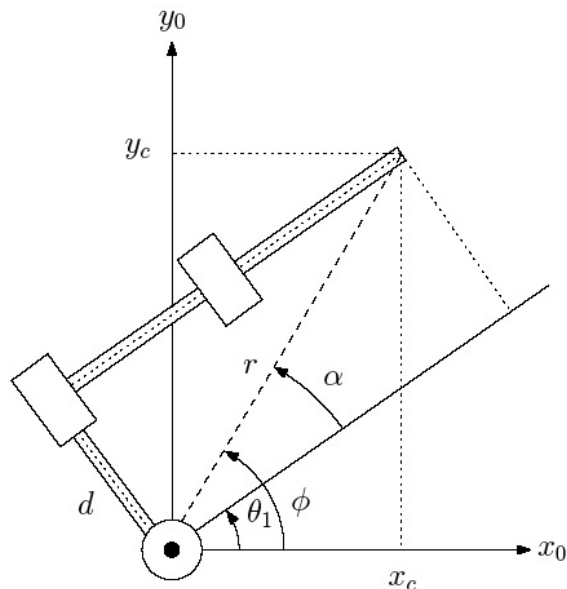
## Rozwiązania dla lewego i prawego ramienia

- Lewe ramię:

$$\theta_1 = \phi - \alpha$$

$$\phi = \mathbf{atan2}(x_c, y_c)$$

$$\alpha = \mathbf{atan2}\left(\sqrt{x_c^2 + y_c^2 - d^2}, d\right)$$



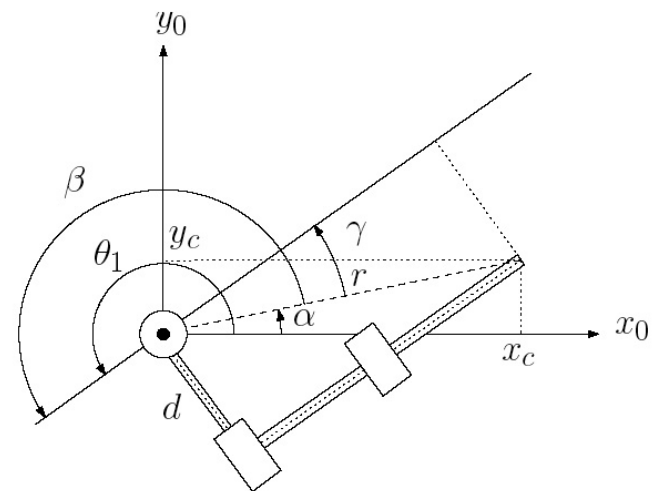
- Prawe ramię:

$$\theta_1 = \alpha + \beta$$

$$\alpha = \mathbf{atan2}(x_c, y_c)$$

$$\beta = \pi + \mathbf{atan2}\left(\sqrt{x_c^2 + y_c^2 - d^2}, d\right)$$

$$= \mathbf{atan2}\left(-\sqrt{x_c^2 + y_c^2 - d^2}, -d\right)$$



## Rozwiązania dla lewego i prawego ramienia

- W ogólności istnieją zatem dwa rozwiązania dla kąta  $\theta_1$ .
- Znajdywanie  $\theta_2$  oraz  $\theta_3$  odbywa się tak samo jak dla manipulatora planarnego rozważanego w drugim wykładzie:

$$\cos \theta_3 = \frac{r^2 + s^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3}$$

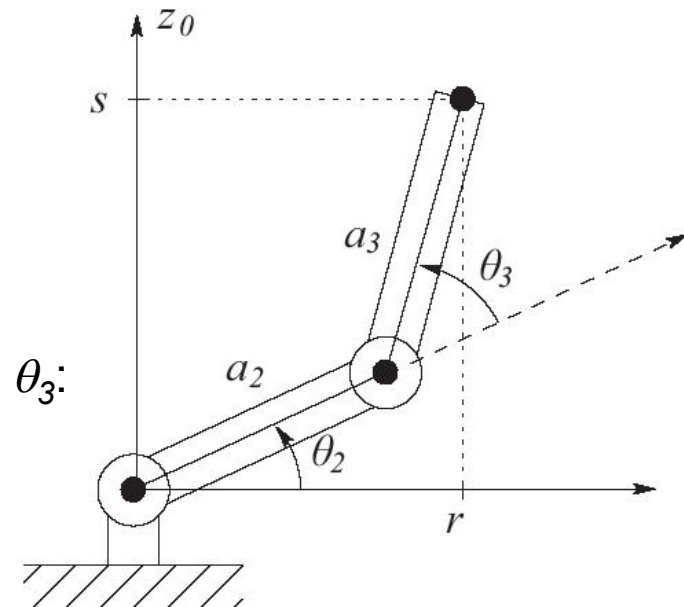
$$r^2 = x_c^2 + y_c^2 - d^2$$

$$s = z_c - d_1$$

$$\Rightarrow \cos \theta_3 = \frac{x_c^2 + y_c^2 - d^2 + (z_c - d_1)^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} \equiv D$$

- Zatem możemy określić dwa rozwiązania dla  $\theta_3$ :

$$\theta_3 = \mathbf{atan2}(D, \pm\sqrt{1-D^2})$$



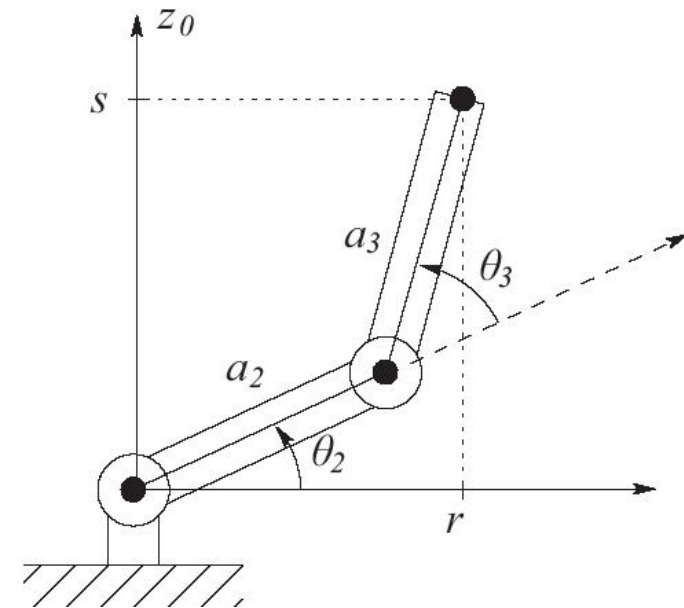
## Rozwiązania dla lewego i prawego ramienia

- Dwa rozwiązania dla  $\theta_3$  odpowiadają pozycjom ramienia u dołu i u góry.
- Teraz znajdujemy  $\theta_2$ :

$$\theta_2 = \mathbf{atan2}(r, s) - \mathbf{atan2}(a_2 + a_3 c_3, a_3 s_3)$$

$$= \mathbf{atan2}\left(\sqrt{x_c^2 + y_c^2 - d^2}, z_c - d_1\right) - \mathbf{atan2}(a_2 + a_3 c_3, a_3 s_3)$$

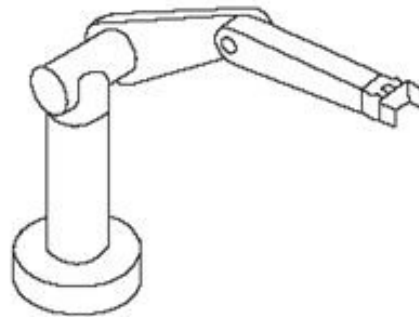
- W ten sposób istnieją dwa rozwiązania dla pary  $(\theta_2, \theta_3)$ .



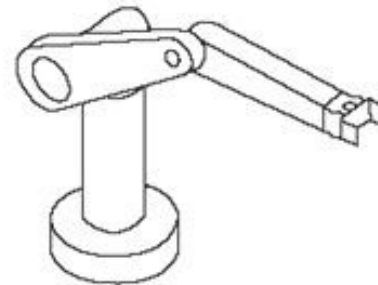


## RRR: ogółem cztery rozwiązania

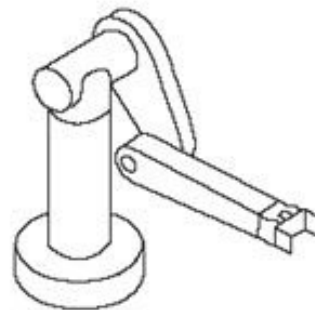
- W ogólności, dla manipulatora z łokciem będą istniały maksymalnie cztery rozwiązania problemu kinematyki odwrotnej pozycji.
  - Np. PUMA



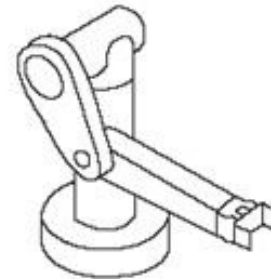
ramię z lewej strony u góry



ramię z prawej strony u góry



ramię z lewej strony u dołu



ramię z prawej strony u dołu

## Przykład: manipulator RRP

- Konfiguracja sferyczna
  - Znajdź  $\theta_1$  stosując tę samą metodę jak dla RRR

$$\theta_1 = \mathbf{atan2}(x_c, y_c)$$

- Ponownie, jeżeli istnieje przesunięcie, będą  
Rozwiązania dla lewego i prawego ramienia

- Znajdź  $\theta_2$ :

$$\theta_2 = \mathbf{atan2}(s, r)$$

$$r^2 = x_c^2 + y_c^2$$

$$s = z_c - d_1$$

- Znajdź  $d_3$ :

$$d_3 = \sqrt{r^2 + s^2}$$

$$= \sqrt{x_c^2 + y_c^2 + (z_c - d_1)^2}$$

