Uniwersytet Zielonogórski
Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych

Laboratorium sterowania procesami ciągłymi

Modelowanie układów w przestrzeni stanów

1. Zapoznać się z następującymi poleceniami w środowisku Matlab:
   `lsim`, `initial`, `ss`, `ssdata`, `tfdata`, `ss2tf`, `tf2ss`.

   Jeśli jest to możliwe, użyj powyższych poleceń do implementacji rozwiazań ponższych zadań.

2. Dynamika układu mechanicznego skaładającego się z ciężarka (m - masa ciężarka), tłumika (d - współczynik tłumienia) i sprężyny (k - stała sprężystości) opisany jest następujacym równaniem

   $$m\ddot{p} + c\dot{p} + kp = F$$

   Znajdź reprezentację powyższego równania w przestrzeni stanów. Zbuduj model tego układu w środowisku Simulink. Dobierz parametry m, c, k tak aby otrzymać odpowiedź tłumioną.

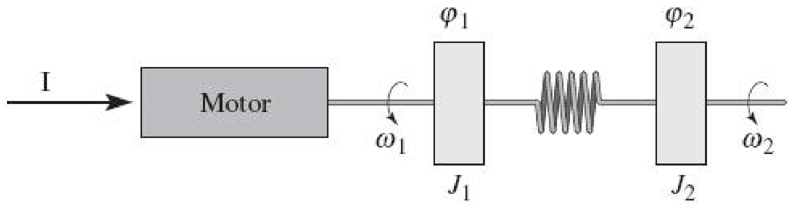
3. Skoczek spadochronowy o masie $m = 68$[kg] skacze z balastem o masie m_b z nieruchomo zawieszonego balonu. Stwórz model swobodnego spadku w przestrzeni stanów z wykorzystaniem środowiska Matlab przy załozeniu, że siła oporu powietrza jest wprost proporcjonalna do prędkosci spadku skoczka. Następnie:

   (a) Wyznacz predkość spadku skoczka po upływie 10[s] od skoku, jeżeli $m_b = 10$[kg].

   (b) Dla jakiej wartości m_b prędkość maksymalna skoczka będzie wynosić $v_{\max} = 62.76[\frac{m}{s}]$.

   Przyjąć przyspieszenie ziemskie $g = 9.81[\frac{m}{s^2}]$ i współczynik oporu powietrza $k = 12.5[\frac{kg}{s}]$.

4. Rozważ układu silnika prądu stałego wprawiającego w ruch obrotowy dwie masy połacząne sprężystym wałem - patrz Rys. 1.



Rysunek 1: Układ dwóch wirujących mas.

   Przyjmując, że moment obrotowy silnika jest proporcjonalny do natężenia prądu I to dynamika układu jest opisana poniższymi rówaniami

   $$\begin{aligned} J_1\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + c\left(\frac{d\varphi_1}{dt} - \frac{d\varphi_2}{dt}\right) + k\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) &= k_I I \\ J_2\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + c\left(\frac{d\varphi_2}{dt} - \frac{d\varphi_1}{dt}\right) + k\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) &= T_d \end{aligned}$$

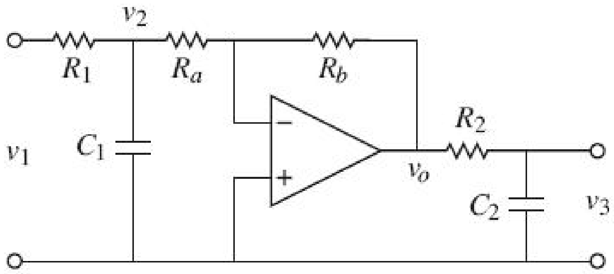
   Na podstawie tych równań wyznacz model w przestrzeni stanów, przyjmując, że zmienne stanu zdefinowane są w następujący sposób: $x_1 = \varphi_1$, $x_2 = \varphi_2$, $x_3 = \omega_1/\omega_0$, $x_4 = \omega_2/\omega_0$, gdzie

   $$\omega_0 = \sqrt{k\frac{(J_1 + J_2)}{J_1 J_2}}$$

   Przyjmij, że parametry układu są znane i stałe.

5. Rozważ układ elekryczny ze wzmacniaczem operacyjnym przedstawiony na Rys. 2.
   Pokaż, że dynamika tego układu może być zapisana w przestrzeni stanów w następującej posaci

   $$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_1} - \frac{1}{R_aC_1} & 0 \\ \frac{R_b}{R_a}\frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1C_1} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

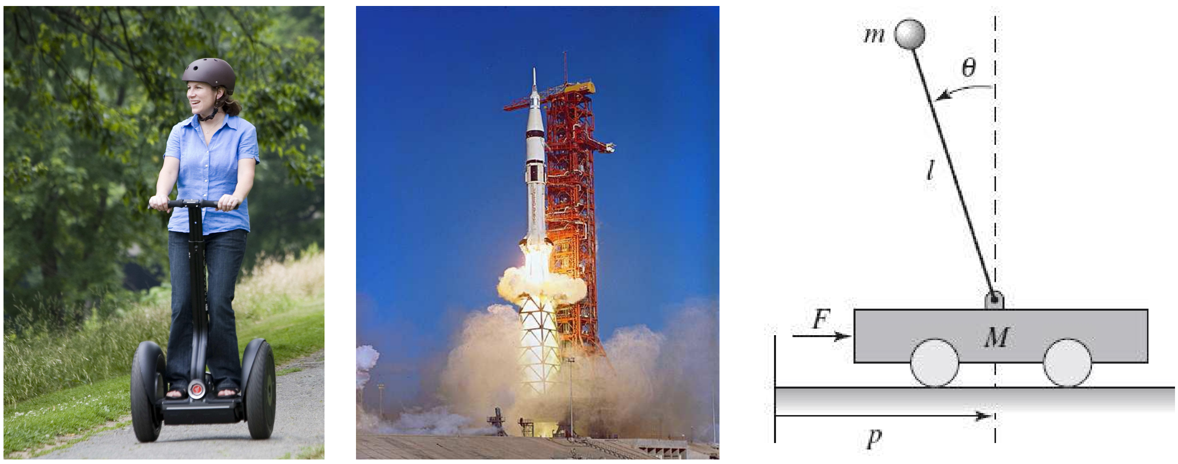


Rysunek 2: Układ oscylatora ze wzmacniaczem operacyjnym.

gdzie $u = v_1$ i $y = v_3$. Przyjmij, że

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

6. Wahadło odwrócone jest jednym z najczęściej spotykanych modeli w automatyce i robotyce. Model ten jest przykładowo wykorzystywany w projektowaniu regulatorów dla transporterów mobilnych lub rakiet balistycznych.



(a) (b) (c)

Rysunek 3: Segway (a). Rakieta Saturn (b). Układ wahadła odwróconego na wózku (c).

Układ wahadła odwróconego (zobacz Rys. 3(c)) jest opisany następującymi równaniami ruchu

$$\begin{bmatrix} (M+m) & -ml\cos(\theta) \\ -ml\cos(\theta) & (J+ml^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\dot{p} + ml\sin(\theta)\dot{\theta}^2 \\ \gamma\dot{\theta} - mgl\sin(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

gdzie

- p, $\dot{p}$ pozycja i prędkość wózka,
- θ kąt odchylenia wahadła od położenia równowagi,
- F siła przyłożona do wózka,
- M masa wózka na którym zamocowane jest wahadło,
- m masa wahadła,
- J moment bezwładności wahadła,
- l odległość pomiędzy środkami ciężkości wózka i wahadła,
- g przyspieszenie ziemskie,
- c i γ współczynniki tarcia.

Wyznacz model wahadła odwróconego w przestrzeni stanów, przyjmując że wektor stanu ma postać $x = (p, \theta, \dot{p}, \dot{\theta})$, sygnał sterujący $u = F$ i wyjście $y = (p, \theta)$. W celu uproszczenia postaci modelu zdefiniuj następujące stałe: $M_t = M + m$, $J_t = J + ml^2$. Na podstawie otrzymanego modelu zbuduj symulator wahadła w środowisku SIMULINK.

7. Na podstawie otrzymanego w poprzednim zadaniu modelu, wyznacz model liniowy w przestrzeni stanów przyjmując (dla $\theta \ll 1$) $\sin(\theta) = \theta$, $\cos(\theta) = 1$ oraz $\dot{\theta}^2 = 0$. Dodatkowo wyznacz model przy założeniu $c = \gamma = 0$ (czyli nie występuje tarcie). Dokonaj symulacji obu modeli w środowisku MATLAB (korzystając z poleceń `lsim`, `initial`, `step`). Określ stabilność układów. Porównaj odpowiedź układu liniowego i nieliniowego.

8. W przypadku analizowania problemu stabilizacji startu rakiety balistycznej możemy używać modeli wahadła odwróconego otrzymanych w poprzednich zadaniach. W rozważanym problemie stabilizacji rakiety ni musimy jednak kontrolować pozycji wózka (zmienna p) dlatego też model dynamiki układu moze być opisany następującymi równaniami:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \frac{mgl}{J_t}\sin(\theta) - \frac{\gamma}{J_t}\dot{\theta} + \frac{l}{J_t}\cos(\theta)u \end{bmatrix}$$
$$y = \theta$$

gdzie γ jest współczynikiem tarcia, $J_t = J + ml^2$ oraz u jest siłą przyłożoną u podstawy rakiety. Wyzacz model liniowy w przestrzeni i zbuduj jego reprezentację w środowisku SIMULINK.