

# Filtr Kalmana

## Sterowanie Procesami ciągłymi

### 1 Opis układu sterowania lotem

Rozważmy uproszczony model sterowania lotem [1, pp. 105-107]) opisany równaniami

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k, \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad (2)$$

przy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.9944 & -0.1203 & -0.4302 \\ 0.0017 & 0.9902 & -0.0747 \\ 0 & 0.8187 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.4252 \\ -0.0082 \\ 0.1813 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_k = 10, \quad (3)$$

gdzie stan początkowy  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  oraz  $\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k)$ ,  $\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k)$  przy  $\mathbf{Q}_k = 0.1\mathbf{I}$  and  $\mathbf{R}_k = 0.2\mathbf{I}$ .

#### 1.1 Implementacja modelu układu sterowania lotem

Utwórz m-plik i zapisz go pod nazwą `FiltrKalmana`, a następnie wprowadź następujący kod:

```
A=[0.9944, -0.1203, -0.4302;0.0017,0.9902,-0.0747;0,0.8187,0];  
B=[0.4252;-0.0082;0.1813]; C=eye(2,3); D=zeros(2,1);  
Q=0.01*eye(size(A)); R=0.3*eye(size(C,1)); Q05=sqrt(Q);  
R05=sqrt(R); x0=zeros(size(A,1),1);
```

Utwórz nowy model w SIMULINKu i zapisz go pod nazwą `KalmanFilter_m`. Umieść na nim komponent `Subsystem`, a następnie zbuduj jego strukturę wewnętrzną zgodnie z rys. 1. UWAGA!!! Jako warunek początkowy dla `Unit delay` wprowadź `x0`, ustaw również parametry generatorów „szumu”:

```
Mean: zeros(size(Q,1),1)  
Variance: ones(size(Q,1),1)  
Mean: zeros(size(R,1),1)  
Variance: ones(size(R,1),1)
```

### 2 Projektowanie filtra Kalmana

Algorytm filtra Kalmana:

#### Time update

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k, \quad (4)$$

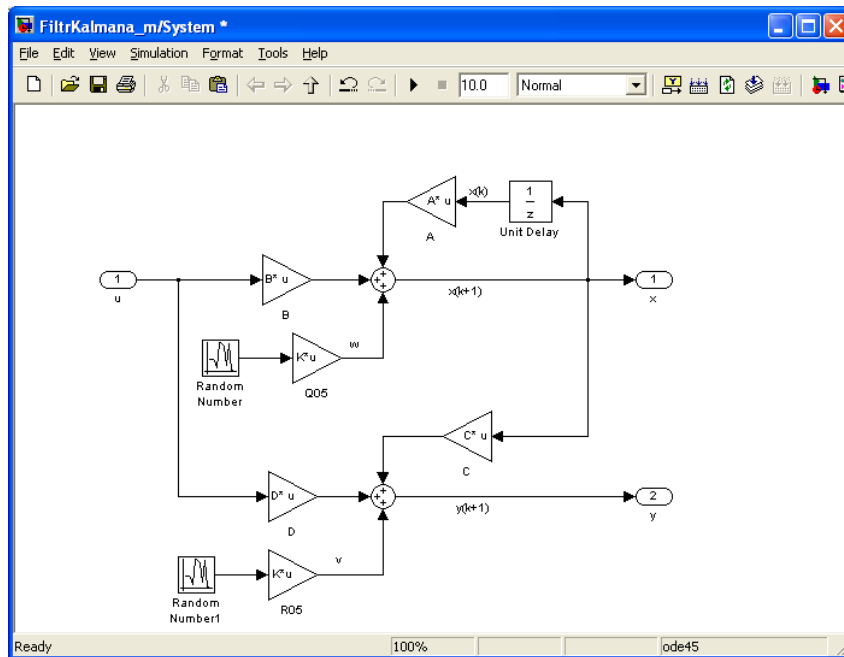
$$\mathbf{P}_{k+1/k} = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k^T + \mathbf{Q}_k. \quad (5)$$

#### Measurement update

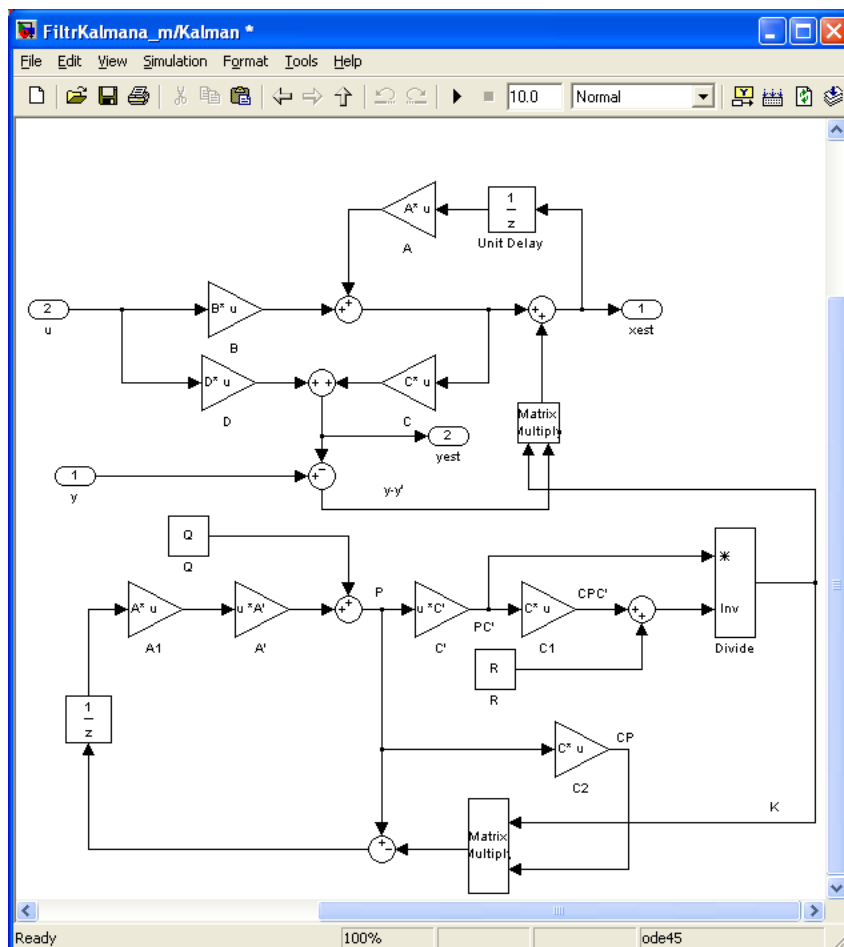
$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} + \mathbf{K}_{k+1} [\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{C}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}], \quad (6)$$

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{C}_{k+1}^T \left[ \mathbf{C}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{C}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1} \right]^{-1}, \quad (7)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_{k+1}] \mathbf{P}_{k+1/k}. \quad (8)$$



Rysunek 1: Model systemu



Rysunek 2: Filtr Kalmana

Umieść w modelu nowy komponent Subsystem, a następnie zbuduj jego strukturę wewnętrzną zgodnie z rys. 2. Uzupełnij kod w m-pliku w następujący sposób

```

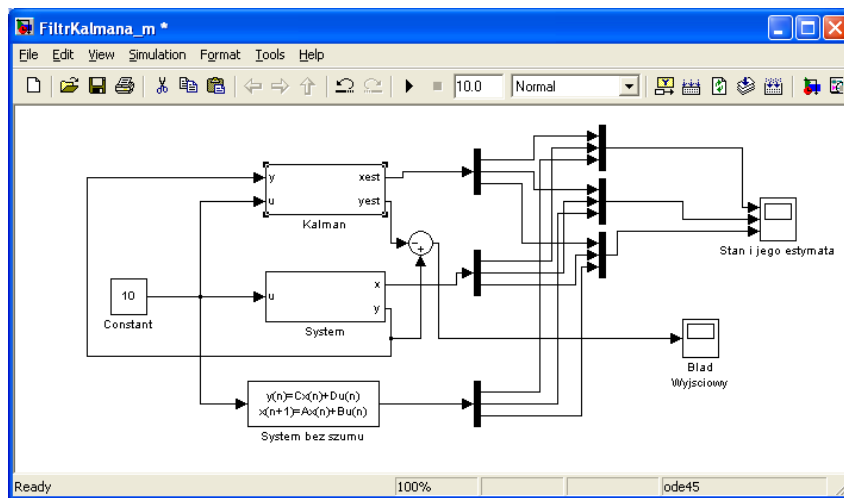
A=[0.9944, -0.1203, -0.4302;0.0017,0.9902,-0.0747;0,0.8187,0];
B=[0.4252;-0.0082;0.1813]; C=eye(2,3); D=zeros(2,1);
Q=0.01*eye(size(A)); R=0.3*eye(size(C,1)); Q05=sqrt(Q);
R05=sqrt(R); x0=zeros(size(A,1),1); x0h=ones(size(A,1),1);
P0=1e20*eye(size(A)); C1=eye(size(A));
D1=zeros(size(A,1),size(B,2));
open_system('FiltrKalmana_m');
sim('FiltrKalmana_m',300);

```

UWAGA!!! Jako warunek początkowy dla Unit delay wprowadź x0h, a dla drugiego komponentu tego typu warunek początkowy wynosi P0.

### 3 Testowanie filtra Kalmana

Połącz układ zgodnie z rys. 3. UWAGA!!! Parametry „systemu bez szumów” to: A, B, C1, D1, x0.



Rysunek 3: Filtr Kalmana

Uruchom m-plik i przetestuj działanie filtra.

## 4 Zadania

### 4.1 Pomiar zaszumionego napięcia

Parametry równań stanu w przypadku pomiaru stałego napięcia o wartości 10[V] to:  $A = 1$ ,  $B = 0$ ,  $C = 1$ ,  $x_0 = 10$ ,  $w = 0$ ,  $r = 0.1$ . Zmodyfikuj odpowiednio model opracowany w Simulinku i zbadaj działanie filtra dla różnych ustawień macierzy instrumentalnych  $Q$  i  $R$ .

## Literatura

- [1] Chen J. and Patton R. J. (1999): *Robust Model-based Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. – London: Kluwer Academic Publishers.