Uniwersytet Zielonogórski
Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych

Laboratorium Teorii Sterowania

Wartości osobliwe i norma $\mathcal{H}_\infty$

Wprowadzenie

Wartości osobliwe σ_i macierzy A sa definiowane jako $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, gdzie λ_i oznacza wartości własne macierzy A^*A. Największa wartość osobliwa macierzy A oznaczana jest jako $\overline{\sigma}(A)$, a najmniejsza jako $\underline{\sigma}(A)$. Jeśli $y = Ax$, to na podstawie definicji wartości osobliwych mamy

$$\underline{\sigma}(A) \leq \frac{|y|}{|x|} \leq \overline{\sigma}(A)$$

gdzie relacja pomiędzy normą y a normą x, czyli $|y|/|x|$, jest interpretowana jakko wzmocnienie macierzy A. Jeśli x jest równoległy do wektora własnego odpowiadającego największej wartości własnej A^TA to wtedy mamy

$$|y| = \overline{\sigma}(A)|x|$$

Analogicznie, gdy x jest równoległy do wektora własnego odpowiadającego najmniejszej wartości własnej A^TA to wtedy mamy

$$|y| = \underline{\sigma}(A)|x|$$

W ten sposób definiujemy kierunki odpowiadające największej i najmniejszej wartości osobliwej macierzy A.

Przykład w środowisku Matlab

```
A=gallery(3)    % Przykładowa macierz kwadratowa
eig(A)          % wartości własne macierzy A
svd(sym(A))     % wartości osobliwe (symbolicznie)
[U,S,V]=svd(A)  % wartości osobliwe (numerycznie)
diag(S)         % wypisujemy wartości osobliwe
sqrt(eig(A'*A)) % wartości osobliwe z definicji
U'*U            % ortonormalność macierzy U
V'*V            % ortonormalność macierzy V

V*inv(S)*U'     % odwrotność macierzy A na podstawie SVD
inv(A)          % odwrotność A tradycyjnie
```

Kolejną ważną własnością wynikającą z rozkładu SVD macierzy A jest następująca zależność

$$\underline{\sigma}(A) \leq \min(|\lambda_i|) \leq \max(|\lambda_i|) \leq \overline{\sigma}(A)$$

oznacza to, że promień spektralny $\rho(G(j\omega)), \forall\omega \in \mathbb{R}$ (czyli największa wartość własna $G(j\omega)$) zawsze spełnia poniższy warunek

$$\rho(G(j\omega)) \leq \overline{\sigma}(G(j\omega))$$

W przypadku liniowych stabilnych układów opisanych transmitancją $G(s)$ mamy

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$$

gdzie

- $Y(s)$ transformata Laplace'a sygnału wyjściowego układu
- $U(s)$ transformata Laplace'a sygnału wejściowego układu

na podstawie definicji wartości osobliwych otrzymujemy

$$\underline{\sigma}(G(j\omega)) \leq \frac{|Y(j\omega)|}{|U(j\omega)|} \leq \overline{\sigma}(G(j\omega))$$

Przyjmując (wprowadzając normę spektralną)

$$|G(j\omega)| := \overline{\sigma}(G(j\omega))$$

otrzymujemy

$$|Y(j\omega)| \leq |G(j\omega)||U(j\omega)|$$

Co wiecej największe możliwe wzmocnienie układu $G(j\omega)$ jest oznaczane jako $\|G\|_\infty$, które dane jest jako

$$\|G\|_\infty = \max_\omega |G(j\omega)|$$

gdzie $\|G\|_\infty$ oznacza normę $\mathcal{H}_\infty$ układu G. Wiemy również, że dla sygnału wyjściowego $y(t)$ i wejściowego $u(t)$ zachodzi

$$|y| \leq \|G\|_\infty |u|$$

Dlatego właśnie norma $\mathcal{H}_\infty$ może być interpretowana jako wzmocnienie w dziedzinie czasu, czyli

$$\sup_u \frac{\|y\|}{\|u\|} = \|G\|_\infty$$

Zadania

1. Zapoznaj się z programem demonstracyjnym `eigdemo`. Narysuj wykresy wzmocnień dla różnych macierzy dostępnych w tym programie.

2. W stanie ustalonym (czyli dla $\omega = 0$) dla pewnego obiektu mamy

$$G(0) = \begin{bmatrix} 87.8 & -86.4 \\ 108.2 & -109.6 \end{bmatrix}$$

   Dokonaj rozkładu SVD i określ z których kierunków mamy największe i najmniejsze wzmocnienie. Jeśli różnica pomiędzy nimi jest bardzo duża (ok. 100 razy) to oznacza to, że ten układ jest trudny do sterowania. Czy tak sytuacja zachodzi w tym przypadku?

3. Dla układu opisanego następującym modelem w przestrzeni stanów

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.4 & 1.1 \\ 0.6 & 0.1 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0.6 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.5 \\ -0.1 & -0.7 \end{bmatrix}$$

   Narysuj na jednym rysunku wykresy $\sigma(G(j\omega))$ i $\rho(G(j\omega))$ gdzie

$$G(j\omega) = C(j\omega - A)^{-1}B + D$$

   Pamiętaj, że

$$\rho(G(j\omega)) = \max(\text{abs}(\text{eig}(G(j\omega))))$$

4. Wiadomo, że dla dowolnej macierzy o rozmiarze 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

   wartości własne tej macierzy wyrażone są wzorem

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{4a_12a_{21} + (a_{11} - a_{22})^2}\right]$$

   Dla dowolnego układu o dwóch wejściach i dwóch wyjściach (wylosowanego np. funkcją `rmodel`) narysuj wykres wartości własnych jako funkcji częstotliwości.

5. Dana jest następująca macierz

$$A = \begin{bmatrix} 100 & 100 \\ 100.2 & 100 \end{bmatrix}$$

   dla której

$$A^-1 = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 5.1 & -5 \end{bmatrix}$$

   Sprawdź jaki wynik otrzymamy gdy jedną wartość elementu macierzy zmienimy tylko o 0.1%, tj. sprawdź wynik odwracania macierzy gdy

$$A = \begin{bmatrix} 100 & 100 \\ 100.1 & 100 \end{bmatrix}$$

   Wytłumacz otrzymane wyniki na podstawie wartości osobliwych macierzy A i zmodyfikowanej macierzy A. Sprawdź rozwiązania układu równań liniowych $Ax = b$ gdy $b = [1,\ -1]^T$.

6. Udowodnij, że zachodzi następująca zależność

$$G_1(I - G_2G_1)^{-1} = (I - G_1G_2)^{-1}G_1$$

gdzie G_1 i G_2 są dowolnymi macierzami o odpowiednich wymiarach.

7. Dany jest następujący układ

$$G(s) = \frac{1}{10s+1}\begin{pmatrix} 1 & -0.9 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

oraz regulator

$$K(s) = \frac{10s+1}{10s}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Zakładamy, że dopuszczona jest tylko taka zmiana sygnału odniesienia $r(t)$ taka, że $\|r(t)\|_2 \leq 1$. Określ $r(t)$ które powoduje powstanie maksymalnego uchybu regulacji $e(t)$ oraz sygnału sterującego $u(t)$.