ROZDZIAŁ 4

Przepływy w sieciach

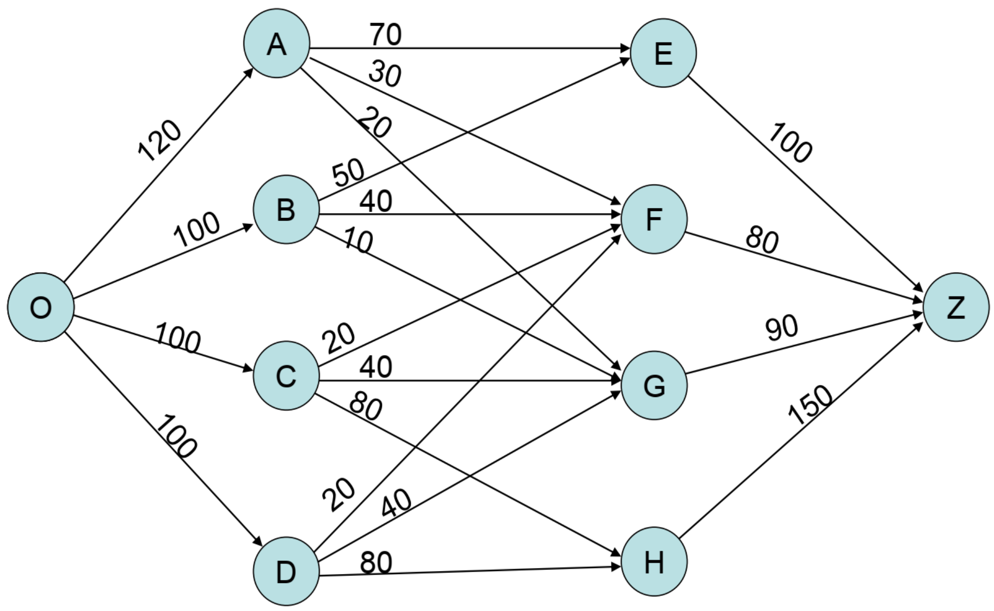
4.1 Maksymalny przepływ w sieci

Problem maksymalnego przepływu w sieci wyjaśnimy posiłkując się następującym przykładem (na podstawie [KF65, rozdział 5]).

Firma X importuje do Polski pomarańcze statkami z portów: (A) na Cyprze, (B) w Izraelu, (C) w Maroku i (D) w Egipcie. Pomarańcze mogą być przywiezione statkami do magazynów firmy w portach: (E) w Hamburgu, (F) w Rostocku, (G) w Szczecinie i (H) w Gdyni. W poszczególnych magazynach firmy X w portach wysyłkowych można składować tygodniowo następujące ilości pomarańczy na potrzeby importu do Polski: w (A) – 120 ton, w (B) – 100 ton, w (C) – 100 ton i w (D) – 100 ton. Z kolei w magazynach firmy X w portach docelowych można tygodniowo składować w celu dalszego transportu do odbiorców następujące ilości pomarańczy: w (E) – 100 ton, w (F) – 80 ton, w (G) – 90 ton i w (H) – 150 ton. Między portami (A)-(D) a (E)-(H) kursują co tydzień statki mogące przewieźć pomarańcze w ilościach podanych w poniższej tabeli (w tonach):

	E	F	G	H
A	70	30	20	0
B	50	40	10	0
C	0	20	40	80
D	0	20	40	80

Z powyższych danych i z tabeli wynika, że możliwości przesyłowe wszystkimi statkami z dowolnego portu wysyłkowego (i do dowolnego portu docelowego) są równe co najmniej zapasom (i możliwościom składowania) w magazynach firmowych w tych portach. Na przykład z portu (D) można przesłać tygodniowo maksymalnie 140 ton pomarańczy, a tygodniowe możliwości składowania w tym porcie wynoszą 100 ton. Z kolei do portu (H) można przywieźć maksymalnie 160 ton pomarańczy, a tygodniowe możliwości składowania w tym porcie wynoszą 150 ton. Dla uproszczenia załóżmy, że koszty transportu są identyczne z dowolnego portu (A)-(D) do dowolnego portu (E)-(H). Zadanie importera polega ułożeniu planu transportu, aby przewieźć największą ilość pomarańczy (towaru) z portów (A)-(D) do portów (E)-(H) z zachowaniem możliwości przesyłowych i z uwzględnieniem ilościowych możliwości magazynowych w magazynach firmowych. Zadanie to można wyrazić w języku teorii grafów i wówczas nazywamy je *zagadnieniem największego przepływu*. Węzły grafu odpowiadające portom (A)-(H) oznaczamy przez v_i, a łączące je łuki oznaczamy przez e_{ij} o *przepustowościach* u_{ij}, $i = 1, 2, 3, 4$, $j = 5, 6, 7, 8$, podanych w powyższej tabeli. W naszym przykładzie brak jest łuków łączących między sobą węzły v_i, $i = 1, 2, 3, 4$, i łuków łączących między sobą węzły v_i, $i = 5, 6, 7, 8$. Można to inaczej przedstawić w ten sposób, że przepustowości dla tych łuków są zerowe. Do węzłów v_i, $i = 1, 2, ..., 8$, dołączamy dwa węzły pomocnicze (O) i (Z). Węzeł pomocniczy (O) oznaczony symbolem v_0 łączy się z węzłami odpowiadającymi portom wyjściowym (A)-(D) łukami o przepustowości równej łącznym zapasom towaru w tych portach. Węzeł ten nazywamy *źródłem*. Z kolei węzły odpowiadające portom docelowym (E)-(H) łączymy łukami z węzłem pomocniczym (Z) oznaczanym również symbolem v_9, o przepustowości równej łącznym ilościowym możliwościom składowania towaru w portach docelowych. Węzeł ten nazywamy *ujściem*. Jeżeli przepustowość danego łuku jest zerowa, to taki łuk możemy usunąć z sieci (takim łukiem nie będzie transportowany towar). Przedstawmy powyższe dane za pomocą sieci skierowanej, w której podano przepustowość poszczególnych łuków oraz zapasy w portach wyjściowych i możliwości składowania w portach docelowych.



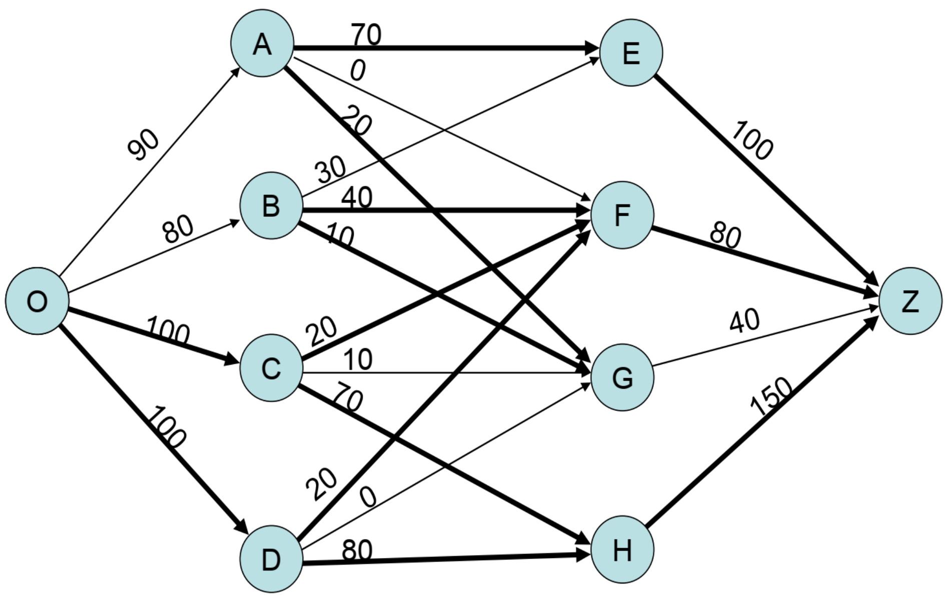
Sieć G wraz z podanymi przepustowościami poszczególnych łuków

Macierz przepustowości oznaczamy symbolem $U := [u_{ij}]_{10\times 10}$. Ma ona postać

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 120 & 100 & 100 & 100 & & & & & \\ & & & & & 70 & 30 & 20 & & \\ & & & & & 50 & 40 & 10 & & \\ & & & & & & 20 & 40 & 80 & \\ & & & & & & 20 & 40 & 80 & \\ & & & & & & & & & 100 \\ & & & & & & & & & 80 \\ & & & & & & & & & 90 \\ & & & & & & & & & 150 \\ & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

przy czym puste miejsca w tej macierzy oznaczają zerowe przepustowości. Zatem sieć skierowaną można oznaczyć jako $G = (V, E, U)$, gdzie V jest zbiorem węzłów, $E \subseteq V \times V$ – zbiorem łuków, a $U : E \to \mathbb{R}_+$ jest macierzą przepustowości łuków. Plan transportowy zwany również *przepływem* jest określony przez macierz $X = [x_{ij}]_{10\times 10}$, $i, j = 0, 1, ..., 9$ (w naszym przykładzie przepływy między portami wyjściowymi i przepływy między portami docelowymi są zerowe; zerowe są również przepływy między v_0 a v_i, $i = 5, 6, 7, 8$, i przepływy między v_i, $i = 1, 2, 3, 4$ a v_9). Zakładamy przy tym, że przepływ jest dopuszczalny, czyli do każdego węzła $v_1, ..., v_8$ wpływa tyle samo, co z niego wypływa oraz przez każdy łuk przepływa wielkość równa co najwyżej przepustowości danego łuku, czyli $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$. Zatem łuki o zerowej przepustowości mogą mieć tylko zerowe przepływy. Ponadto łączny przepływ dla łuków wychodzących ze źródła v_0 musi być równy łącznemu przepływowi dla łuków mających swe końce w ujściu v_9. Bez szkody dla ogólności założyć, że wszystkie przepustowości są dodatnie, jeśli bowiem przepustowość dla łuku e_{ij} byłaby zerowa, to taki łuk moglibyśmy usunąć z grafu G.

W grafie tym można wyróżnić ścieżki proste łączące węzeł początkowy (O) z węzłem końcowym (Z). Jest dokładnie 12 takich ścieżek: OAEZ, OAFZ, OAGZ, OBEZ, OBFZ, OBGZ, OCFZ, OCGZ, OCHZ, ODFZ, ODGZ i ODHZ. Przepływy ze źródła do ujścia mogą być realizowane wyłącznie tymi ścieżkami. Dla danego przepływu dopuszczalnego $X = [x_{ij}]$ łuk e_{ij} nazywamy *łukiem nasyconym*, jeśli $0 < x_{ij} = u_{ij}$. Znajdziemy najpierw tzw. *przepływ zupełny*, czyli taki przepływ X, dla którego każda ze ścieżek łączących węzeł początkowy v_0 z węzłem końcowym v_9 zawiera przynajmniej jeden łuk nasycony. W tym celu wystarczy w każdej z powyższych 12 ścieżek nasycić jeden łuk. Przykład takiego przepływu przedstawiono na poniższym grafie, na którym zaznaczono przepływy i łuki nasycone (pogrubione strzałki). Widzimy, że rysunek ten przedstawia przepływ zupełny. Ilość transportowanego towaru dla tego przepływu wynosi 370 ton (tyle wypływa z węzła wyjściowego O i tyle dopływa do węzła Z).



Przepływ zupełny X w sieci G

Pokażemy, że ten przepływ X można poprawić. W tym celu utwórzmy pomocniczą sieć $G(X)$ znaną również siecią residualną, zależną od danego przepływu X i dla przepustowości U. Sieć ta ma te same węzły, co wyjściowa sieć G. Natomiast łuki w sieci pomocniczej $G(X)$ i przepustowości w tych łukach tworzone są następująco:

(a) Jeśli łuk e_{ij} jest nasycony $0 < x_{ij} = u_{ij}$, to do sieci pomocniczej wprowadzamy łuk e'_{ji} o przepustowości $u'_{ji} = u_{ij}$.

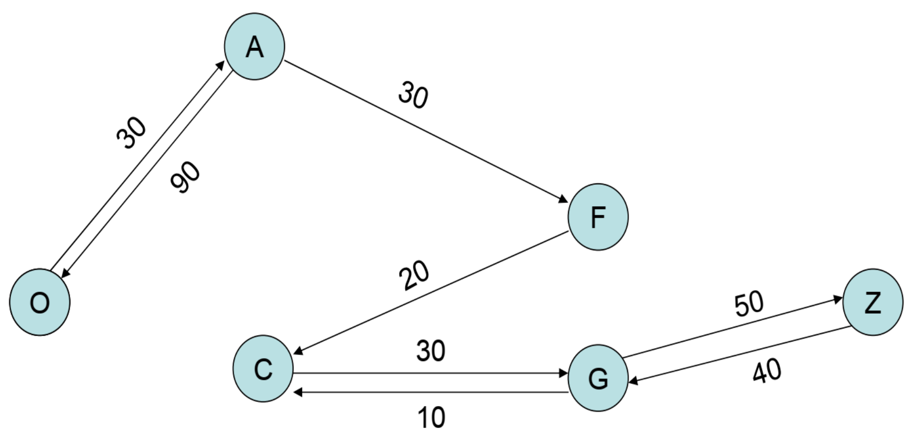
(b) Jeśli łuk e_{ij} jest nienasycony i ma dodatni przepływ, czyli $0 < x_{ij} < u_{ij}$, to do sieci pomocniczej wprowadzamy łuk e'_{ij} o przepustowości $u'_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$ oraz łuk e'_{ji} o przepustowości $u'_{ji} = x_{ij}$.

(c) Jeśli łuk e_{ij} ma zerowy przepływ, czyli $x_{ij} = 0$, to do sieci pomocniczej wprowadzamy łuk e'_{ij} o przepustowości $u'_{ij} = u_{ij}$.

Innymi słowy można powiedzieć, że do sieci pomocniczej $G(X)$ wprowadzamy łuki e_{ij} dla $i, j = 0, 1, ..., 4$ i $j = 5, ..., 9$ o przepustowości $u'_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$, a następnie usuwamy z niej łuki o zerowej przepustowości u'_{ij}. Zauważmy, że dla pomocniczej sieci zachodzi $u'_{ij} + u'_{ji} = u_{ij}$.

Dla danego przepływu X, waga łuku e'_{ij} w sieci residualnej $G(X)$ daje informację, o ile można maksymalnie zwiększyć przepływ na łuku e_{ij} wyjściowej sieci (jeśli $e'_{ij} = e_{ij}$), bądź o ile można maksymalnie zmniejszyć przepływ na łuku e_{ij} wyjściowej sieci (jeśli e'_{ji} jest łukiem przeciwnym do e_{ij}).

Mając dany przepływ X, w sieci pomocniczej $G(X)$ wyznaczamy w niej ścieżkę łączącą O z Z. Jest to na przykład ścieżka $P = \{OA, AF, FC, CG, GZ\}$. Zgodnie z powyższym schematem wyznaczamy w niej przepustowości u'_{ij} dla poszczególnych łuków e'_{ij} tej ścieżki. Na przykład dla ścieżki P mamy $u'_{OA} = 120 - 90 = 30$ (zgodnie z (b)), $u'_{AF} = 30$ (zgodnie z (c)), $u'_{FC} = 20$ (zgodnie z (a)), $u'_{CG} = 40 - 10 = 30$ (zgodnie z (b)) i $u'_{GZ} = 90 - 40 = 50$ (zgodnie z (b)).



Ścieżka łącząca źródło z ujściem jako fragment
sieci residualnej odpowiadającej przepływowi X

Następnie wyznaczamy minimalną z tych przepustowości $\varepsilon = \min\{u'_{ij} : e'_{ij} \in P\}$. Staramy się wybrać ścieżkę P, dla której $\varepsilon > 0$. Taką ścieżkę nazywamy *ścieżką powiększającą*. W naszym przypadku mamy $\varepsilon = \min\{30, 30, 20, 30, 50\} = 20$.

Zauważmy przy okazji, że dla danego przepływu X ścieżka P w sieci residualnej $G(X)$ jest powiększająca, jeśli dla dowolnego łuku e_{ij} tej ścieżki zachodzi:

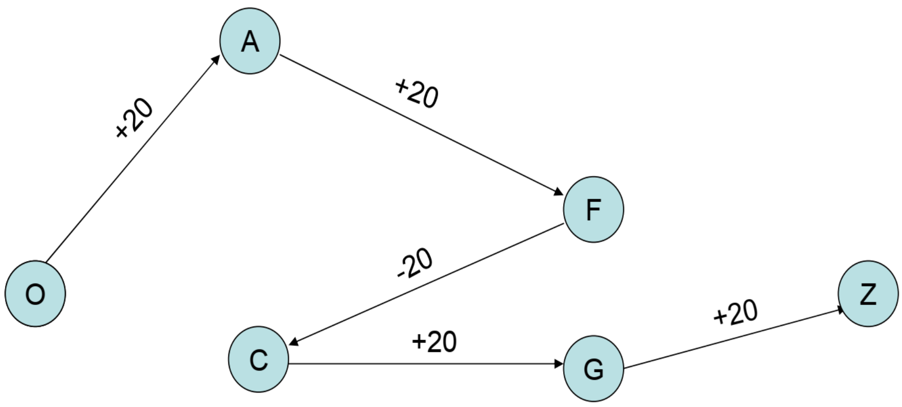
(i) jeśli łuk $e_{ij} \in E$, to $x_{ij} < u_{ij}$ (tak jest dla łuków OA, AF, CG i GZ)

(ii) jeśli $e_{ji} \in E$, to $x_{ij} > 0$ (taj jest dla łuku CF).

Przy spełnieniu tych warunków otrzymamy bowiem $\varepsilon > 0$.

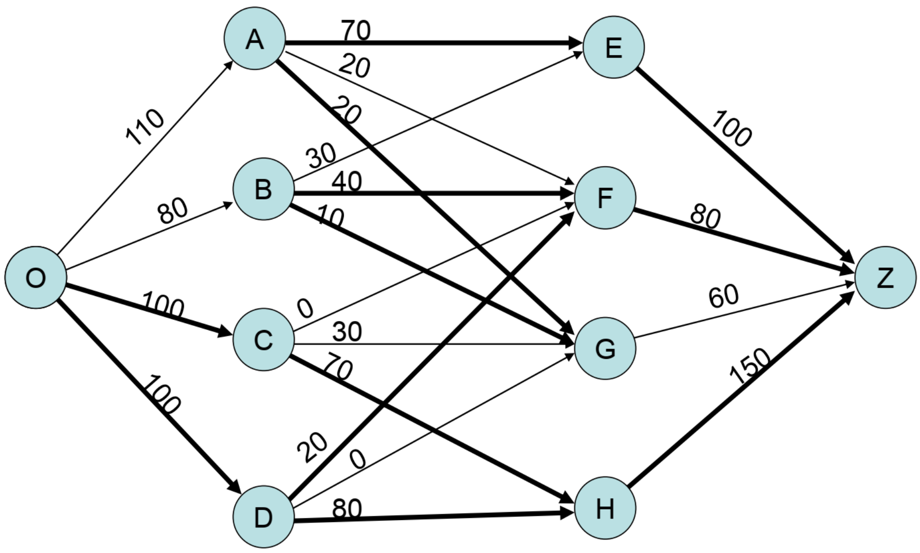
Innymi słowy łuki w wyjściowej sieci G zgodne z łukami w ścieżce P są nienasycone w sieci residualnej $G(X)$, zaś łuki do nich przeciwne mają dodatni przepływ. Powoduje to, że łuki w ścieżce P mają dodatnie przepustowości, czyli $\varepsilon > 0$.

Teraz na łukach e_{ij} wyjściowej sieci G takich, że $e'_{ij} \in P$ lub $e'_{ji} \in P$ poprawiamy przepływy x_{ij} w następujący sposób: dla łuku $e_{ij} = e'_{ij}$ zwiększamy przepływ o ε, a dla łuku $e_{ij} = e'_{ji}$ zmniejszamy przepływ o ε. Poprawiamy więc przepływy na łukach OA, AF, CF, CG, GZ (odpowiadają one łukom ścieżki P w pomocniczej sieci $G(X)$, przy czym łuki OA, AF, CG, GZ są zgodne z odpowiednimi łukami ścieżki P, a łuk CF ma przeciwny zwrot do łuku FC w ścieżce P.



Zmiana przepływu w sieci G w stosunku do przepływu X

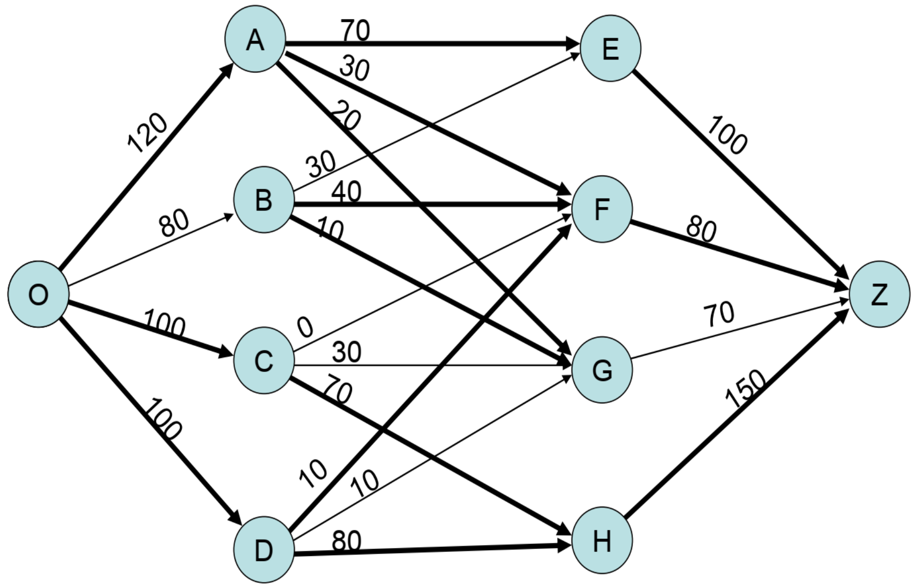
W poprawionym przepływie X^+ zmieniają się jedynie przepływy na łukach OA, AF, CF, CG, GZ i wynoszą one $x^+_{OA} = 90+20 = 110$, $x^+_{AF} = 0+20 = 20$, $x^+_{CF} = 20-20 = 0$, $x^+_{CG} = 10+20 = 30$, $x^+_{GZ} = 40 + 20 = 60$. Pozostałe przepływy pozostają bez zmiany. Zwróćmy uwagę na to, że nowy przepływ jest dopuszczalny dla wyjściowej sieci. Do każdego węzła nadal wpływa tyle samo, co z niego wypływa. Natomiast ilość towaru przetransprtowana z węzła O do węzła Z zwiększyła się o $\varepsilon = 20$ i wynosi 390. Zwiększenie przepływu sieci o wartość $\varepsilon > 0$ uzasadnia nazwanie ścieżki P ścieżką powiększającą. Zwróćmy też uwagę na to, że nie musimy wyznaczać wszystkich łuków i odpowiadających im przepustowości w sieci pomocniczej $G(X)$. Wystarczy znaleźć w tej sieci pomocniczej ścieżkę powiększającą łączącą O i Z (czyli speniającą warunki (i)-(ii) i dla jej łuków wyznaczyć przepustowości u'_{ij}. Poprawiony przepływ przedstawiono na poniższym grafie



Przepływ X' w sieci G

Dla nowego przepływu X^+ postępujemy podobnie: wyznaczamy sieć pomocniczą $G(X^+)$, ścieżkę łączącą O z Z w sieci $G(X^+)$ (na przykład OAFDGZ), przepustowości dla łuków tej ścieżki i poprawiamy przepływy dla wybranych łuków. Przepustowości dla podanej ścieżki w pomocniczejsieci wynoszą kolejno $10, 10, 20, 40, 30$. Zatem dla tej ścieżki $\varepsilon = 10$ i możemy poprawić przepływy dla łuków tej ścieżki. Podobnie jak poprzednio, poprawiony przepływ przedstawiony na poniższym grafie. Nowy przepływ jest dopuszczalny dla wyjściowej sieci. Do każdego węzła nadal wpływa tyle samo, co z niego wypływa oraz ze źródła wypływa tyle samo co wpływa do ujścia. Ilość towaru przetransprtowana z węzła O do węzła Z zwiększyła się o

$\varepsilon = 10$ i wynosi teraz 400.



Przepływ maksymalny w sieci G

Uzasadnimy teraz, że tego przepływu nie da się poprawić. Dla zbioru wierzchołków $W \subseteq V$ takiego, że Z$\in W$ a O$\notin W$ weźmy cięcie $\delta(W)$. Zgodnie z definicją cięcia, $\delta(W)$ jest zbiorem łuków grafu G mających początek w W zaś koniec w $V \diagdown W$. Przypominamy, że (w przeciwieństwie do sieci nieskierowanych) cięcie $\delta(W)$ nie musi być równe $\delta(V \diagdown W)$. Nietrudno zauważyć, że dla danego przepływu X przez takie cięcie $\delta(W)$ może przepłynąć maksymalnie tyle towaru, ile wynosi łączna przepustowość łuków należących do tego cięcia. Przepływ w sieci G nie może być większy niż przepustowość cięcia $\delta(W)$, ponieważ cały towar, który ma wypłynąć ze źródła (O) lub równoważnie dotrzeć do ujścia (Z) musi przepłynąć przez cięcie $\delta(W)$, a ten przepływ nie może być większy niż przepustowość tego cięcia. Przepustowość łuków należących do cięcia $\delta(W)$ nazywać *przepustowością cięcia* $\delta(W)$. Jeśli więc znajdziemy cięcie dla którego przepustowość jest równa ilości towaru wypływającego ze źródła (O) (lub równoważnie dopływającego do ujścia (Z)), to dany przepływ X jest maksymalny. Jest to wniosek z tzw. twierdzenia Forda–Fulkersona, które przedstawimy w dalszej części. W naszym przypadku, dla $W = \{C, D, F, G, H, Z\}$ przez cięcie $\delta(W)$ przepływa 400 ton towaru i wielkość ta jest równa przepustowości tego cięcia, gdyż wszystkie łuki tego cięcia są nasycone. Ponieważ z O wypływa 400 ton (lub równoważnie do Z dopływa 400 ton), więc przepływ X przedstawiony na powyższym rysunku jest maksymalny.

Przejdźmy teraz do ogólnego sformułowania problemu maksymalnego przepływu w sieci.

Dana jest sieć skierowana $G := (V, E, U)$, gdzie $V = \{v_0, v_1, ..., v_{n+1}\}$ jest zbiorem węzłów, $E \subseteq V \times V$ jest zbiorem łuków oznaczonych symbolami e_{ij} (początkiem łuku e_{ij} jest węzeł v_i, a końcem – węzeł v_j) a $U := [u_{ij}] : E \to \mathbb{R}_+$ jest macierzą wag (*przepustowości*) dla łuków tej sieci (jeśli zbiór E nie zawiera łuku e_{ij}, to przyjmujemy $u_{ij} = 0$). Łuk o początku w węźle v i końcu w węźle w oznaczamy również symbolem vw. W zbiorze węzłów tej sieci wyróżnione są węzeł początkowy v_0 zwany *źródłem* (oznaczanym również symbolem r) i węzeł końcowy v_{n+1} zwany *ujściem* (oznaczanym symbolem s). Bez szkody dla ogólności możemy założyć, że w źródle nie kończy się żaden łuk i w ujściu nie zaczyna się żaden łuk. Ponadto zakładamy, że w sieci G istnieje przynajmniej jedna droga mająca początek w źródle i koniec w ujściu. Macierz $X = [x_{ij}] : E \to \mathbb{R}_+$ nazywamy *przepływem* w sieci G (jeśli zbiór E nie zawiera łuku e_{ij}, to przyjmujemy, że $x_{ij} = 0$). Podobnie jak dla zagadnienia transportowego macierz X możemy zapisać w postaci wektora x wymiaru równego liczbie łuków w sieci G. Jeśli $v_i = v$ i $v_j = w$, to wielkość x_{ij} oznaczamy również symbolem x_{vw}, a przepustowość u_{ij} symbolem u_{vw}. Mówimy, że *przepływ przez łuk* vw wynosi x_{vw}. Do węzła v dopływa $\sum_{w\in V, wv\in E} x_{wv}$, a odpływa $\sum_{w\in V, vw\in E} x_{vw}$. Wielkość

$$f_v(X) = \sum_{w\in V, wv\in E} x_{wv} - \sum_{w\in V, vw\in E} x_{vw}$$

nazywamy *przepływem sieci przez węzeł* v albo nadwyżką przepływu X przez węzeł v. Zakładamy, że dla każdego węzła $v \in V$ różnego od źródła i od ujścia spełniony jest warunek $f_v(X) = 0$, czyli do każdego węzła v nie będącego ani źródłem ani ujściem wpływa łącznie tyle samo co z niego wypływa. Ponadto dla dowolnego łuku vw zachodzi $0 \le x_{vw} \le u_{vw}$. Dla uproszczenia będziemy zakładać również, że X i U ma elementy będące liczbami całkowitymi nieujemnymi.

Zagadnienie maksymalnego przepływu ma postać

$$\begin{aligned}
& && \text{maksymalizować } f_s(X) \\
\text{przy ograniczeniach} & : && \\
f_v(X) &= && 0 \text{ dla dowolnego } v \in V\setminus\{r,s\} && (4.1)\\
0 &\le && x_e \le u_e \text{ dla dowolnego } e \in E && (4.2)\\
x_e &\in && \mathbb{Z} \text{ dla dowolnego } e \in E && (4.3)
\end{aligned}$$

Podobnie jak poprzednio symbolem $\delta(W)$ oznaczmy cięcie sieci G odpowiadające nietrywialnemu podzbiorowi węzłów $W \subset V$. Cięcie $\delta(W)$ takie, że $s \in W$ i $r \notin W$ nazywamy (r,s)-*cięciem*. Przypominamy, że w przeciwieństwie do cięcia w grafie nieskierowanym cięcia $\delta(W)$ i $\delta(V\setminus W)$ nie muszą byc identyczne. (r,s)-*przepływem* w sieci G o źródle r i ujściu s nazywamy przepływ X spełniający (4.1), natomiast jeśli przepływ ten spełnia dodatkowo (4.2), to nazywamy go (r,s)-*przepływem dopuszczalnym*. Dla zbioru łuków $F \subseteq E$ symbolem $U(F) := \sum_{e\in F} u_e$ oznaczamy łączną przepustowość łuków należacych do F lub *przepustowość* F, a symbolem $X(F) := \sum_{e\in F} x_e$ łączny *przepływ przez łuki* ze zbioru F. Dla danego dopuszczalnego (r,s)-przepływu X wielkość $f_s(X)$ nazywamy *łącznym przepływem w sieci* $\dot{G}$. Z uwagi na równość (4.1) wielkość ta przedstawia ile towaru dopływa do ujścia. Oczywiście $f_s(X) = f_r(X)$.

Dla danego przepływu X sieć residualną $G(X)$ i ścieżkę powiększającą definiuje się podobnie jak w przedstawionym uprzednio przykładzie.

W sieci G istnieje skończenie wiele dróg prostych łączących źródło r z ujściem s.

Podamy teraz kilka własności przepływu przez sieć, w tym twierdzenie Forda–Fulkersona.

Twierdzenie 4.1.1 *Dla dowolnego* (r,s)*-cięcia* $\delta(W)$ *i dla dowolnego* (r,s)*-przepływu* X *zachodzi*

$$X(\delta(W)) - X(\delta(V\setminus W)) = f_s(X).$$

Dowód tego twierdzenia pozostawiamy czytelnikowi.

Twierdzenie to mówi, że różnica między tym, co łącznie wpływa do łuków dowolnego (r,s)-cięcia, a co z nich łącznie wypływa jest równa temu co wypływa ze źródła (lub równoważnie temu co dopływa do ujścia).

Wniosek 4.1.2 *Dla dowolnego (r,s)-cięcia $\delta(W)$ i dla dowolnego dopuszczalnego (r,s)-przepływu X zachodzi*

$$f_s(X) \leq U(\delta(W))$$

Proof. ponieważ $X(\delta(W)) \leq U(\delta(W))$ i $X(\delta(V \setminus W)) \geq 0$, więc z twierdzenia 4.1.1 wynika, że

$$f_s(X) = X(\delta(W)) - X(\delta(V \setminus W)) \leq U(\delta(W)) - 0 = U(\delta(W))$$

■

Dzięki temu wnioskowi wiemy, że jeśli dla danego dopuszczalnego (r,s)-przepływu X znajdziemy (r,s)-cięcie $\delta(W)$, którego przepustowość jest równa wartości tego przepływu, to przepływ X jest maksymalny. W tym celu dla (r,s)-przepływu X wystarczy znaleźć cięcie $\delta(W)$, którego wszystkie łuki są nasycone.

Wynika to z dwóch faktów:
Dla danego dopuszczalnego (r,s)-przepływu X łączny przepływ $f_s(X)$ w sieci G nie może przekroczyć przepustowości $U(\delta(W))$ dowolnego (r,s)-cięcia $\delta(W)$. Jeśli więc dla danego dopuszczalnego (r,s)-przepływu X (r,s)-cięcie $\delta(W)$ jest nasycone, czyli łączny przepływ przez to cięcie jest równy jego przepustowości, to
(a) Przepustowość $U(\delta(W))$ dla (r,s)-cięcia $\delta(W)$ jest równa co najmniej temu co dla dowolnego (r,s)-przepływu X dopłynie do ujścia, czyli łącznemu przepływowi $f_s(X)$ w sieci G.
(b) Jeśli dla danego przepływu X wszystkie łuki w (r,s)-cięciu $\delta(W)$ są nasycone, to przez to cięcie $\delta(W)$ przepływa dokładnie $U(\delta(W))$.

Twierdzenie 4.1.3 (Ford–Fulkerson, 1956) *Niech $G = (V, E, U)$ będzie siecią ze źródłem r i ujściem s, dla której istniej (r,s)-droga, gdzie V jest zbiorem węzłów, E – zbiorem łuków zaś U – macierzą przepustowości o nieujemnych całkowitych elementach. Następujące warunki są równoważne:*

(i) *maksymalna wartość $f_s(X)$ łącznego przepływu przez sieć G dla dopuszczalnych (r,s)-przepływów X wynosi p;*

(ii) *minimalna przepustowość $U(\delta(W))$ dla (r,s)-cięć $\delta(W)$ wynosi p;*

(iii) *w sieci residualnej $G(X)$ określonej przez dopuszczalny (r,s)-przepływ X o wartości p nie istnieje ścieżka powiększająca P.*

Proof. (Na podstawie [CCPS98, Ustęp 3.1])
(i)$\Longleftrightarrow$(ii) Równoważność tych warunków oznacza, że

$$\max\{f_s(X) : X \text{ jest dopuszczalnym } (r,s)\text{-przepływem}\} = \min\{U(\delta(W)) : \delta(W) \text{ jest } (r,s)\text{-cięciem}\}.$$

Na mocy wniosku 4.1.2 wystarczy pokazać, że istnieje dopuszczalny (r,s)-przepływ X i (r,s)-cięcie W takie, że $f_s(X) = U(\delta(W))$. Niech X będzie dopuszczalnym (r,s)-przepływem dla którego łączny przepływ $f_s(X)$ jest maksymalny. Dla tego przepływu X zdefiniujmy

$$W := \{v \in V : \text{istnieje } (r,v)\text{-ścieżka powiększająca } P\}.$$

Oczywiście $W \neq \emptyset$, bo $r \in W$ i $W \subset V$, bowiem $s \notin W$, gdyż w sieci $G(X)$ nie ma ścieżki powiększającej. Gdyby bowiem taka ścieżka istniała, to można by zwiększyć łączny przepływ przez sieć G. Wówczas dowolny łuk $vw \in \delta(W)$ jest nasycony, ponieważ w przeciwnym wypadku dodając łuk vw do (r,v)-ścieżki powiększającej z r do v otrzymalivyśmy ścieżkę powiększającą z r do w, ale $w \notin W$. Zatem $X(\delta(W)) = U(\delta(W))$. W podobny sposób można pokazać, że dla dowolnego łuku $vw \in \delta(V \setminus W)$ mamy $v_{vw} = 0$. Zatem, z twierdzenia 4.1.1 wynika, że

$$f_s(X) = X(\delta(W)) - X(\delta(V \setminus W)) = U(\delta(W)).$$

Implikacja (i)$\Longrightarrow$(iii) jest oczywista.

(iii)$\Longrightarrow$(i) Przypuśćmy, że w sieci residualnej $G(X)$ określonej przez (r,s)-przepływ X o wartości p nie istnieje ścieżka powiększająca. Z dowodu równoważności (i)$\Longleftrightarrow$(ii) wynika, że $f_s(X) = U(\delta(W))$, a więc łączny przepływ jest maksymalny na podstawie wniosku 4.1.2. ■

Z twierdzenia Forda–Fulkersona wynika, że sprawdzenie czy dany przepływ jest maksymalny jest wystarczy sprawdzić, że istnieje cięcie $\delta(W)$, dla którego wszystkie łuki są nasycone ($x_e = u_e$ dla $e \in \delta(W)$) oraz wszystkie łuki należące do $\delta(V \setminus W)$ mają zerowy przepływ.

Pojedyncza iteracja w metodzie wyznaczenia maksymalnego przepływu w sieci G polega na:

1. Wyznaczeniu dowolnego dopuszczalnego (r,s)-przepływu X o wartościach całkowitych
2. Wyznaczeniu sieci residualnej $G(X)$ i dowolnej ścieżki powiększającej P
3. Zastąpieniu przepływu X przepływem poprawionym X^+
4. Sprawdzeniu, czy X^+ jest przepływem maksymalnym (w tym celu można posłużyć się twierdzeniem Forda–Fulkersona).

Ponieważ w każdej iteracji całkowity przepływ przez sieć zwiększa się co najmniej o wielkość ε, która na mocy konstrukcji jest liczbą naturalną, więc po skończonej liczbie iteracji otrzymamy przepływ maksymalny.