

Spis treści

1	Wstęp	1
2	Oznaczenia i podstawowe fakty z algebry liniowej	3
2.1	Oznaczenia	3
2.2	Podstawowe pojęcia i fakty z algebry liniowej	7
2.2.1	Podprzestrzeń liniowa	7
2.2.2	Liniowa niezależność wektorów	7
2.2.3	Układ równań liniowych	8
2.2.4	Iloczyn skalarny i norma wektora	10
2.2.5	Określoność macierzy	12
2.2.6	Norma macierzy	13
2.2.7	Macierze ortogonalne	14
3	Elementy różniczkowania funkcji wielu zmiennych	19
3.1	Podstawowe oznaczenia, definicje i fakty	19
3.2	Funkcje różniczkowalne i ich własności	20
3.3	Zbiory wypukłe	26
3.3.1	Rzut metryczny	27
3.4	Funkcje wypukłe	29
3.4.1	Własności funkcji wypukłych	29
3.4.2	Funkcja wypukła różniczkowalna	31
4	Rozkłady macierzy	35
4.1	Metoda eliminacji Gaussa i rozkład LU	35
4.2	Ortogonalizacja Grama–Schmidta i rozkład QR	38
4.3	Rozkład Cholesky’ego	40
4.4	Rozkład ortogonalny przestrzeni \mathbb{R}^n	41
4.5	Wartości własne i wektory własne macierzy	46
4.5.1	Wektory własne i wartości własne macierzy symetrycznej i macierzy ortogonalnej	48
4.6	Rozkład macierzy na wartości własne	49
4.7	Rozkład macierzy na wartości osobliwe	55
4.8	Wskaźnik uwarunkowania macierzy	59
4.9	Twierdzenie Eckarta–Younga	61
4.10	Analiza głównych składowych	63
4.11	Właściwy rozkład ortogonalny	66
4.12	Macierz pseudoodwrotna Moore’a–Penrose’a	67
4.12.1	Motywacja – liniowe zadanie najmniejszych kwadratów	67
4.12.2	Definicja macierzy Moore’a–Penrose’a	68
4.12.3	Macierz Moore’a–Penrose’a, a rozkład na wartości osobliwe	69

4.12.4	Własności macierzy Moore'a–Penrose'a	70
5	Problemy optymalizacyjne	73
5.1	Podstawowe warunki istnienia minimum	73
5.2	Warunki istnienia minimum dla zadań różniczkowalnych bez ograniczeń	76
5.3	Zadanie minimalizacji różniczkowalnej z ograniczeniami	79
5.3.1	Warunki konieczne rzędu pierwszego istnienia minimum	81
5.4	Zadanie minimalizacji wypukłej	82
5.5	Zadanie minimalizacji różniczkowalnej wypukłej z ograniczeniami	85
5.5.1	Warunki konieczne i wystarczające rzędu pierwszego – Twierdzenie Kuhna–Tuckera	85
5.6	Rozwiązywanie dużych układów równań liniowych	91
5.6.1	Liniowe zagadnienie najmniejszych kwadratów	91
5.6.2	Nieliniowe zagadnienie najmniejszych kwadratów	93
5.7	Inne metody optymalizacyjne	94
5.7.1	Iteracje punktu stałego	94
5.7.2	Metoda Kaczmarza i zrandomizowana metoda Kaczmarza	97
5.7.3	Metoda rzutowania równoczesnego	98
5.7.4	Metoda Landwebera	99
5.7.5	Regresja LASSO	99
5.7.6	Aproksymacja funkcjami sklejanymi	102
5.8	Podprzestrzeń Kryłowa	102
5.9	Metoda Galerkina	102
6	Inne zagadnienia	103
6.1	Jądra Mercera	103