Prof. Andrzej Cegielski, WMIiE UZ semestr letni 2024/2025

Optymalizacja – lista 1 – modele matematyczne

1. (*Optymalny koszyk towarów*) Konsument dysponuje gotówką w wysokości 100 zł i może za nią nabyć dwa towary P_1 (chleb) i P_2 (mleko), na które obowiązują ceny, odpowiednio, $1,50$ zł/kg i 2 zł/l. Konsumentowi przypisana jest funkcja użyteczności $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$, przy czym $u(x,y) = xy$ oznacza stopień jego zadowolenia wynikający z nabycia x kg chleba i y l mleka. Celem konsumenta jest zakup (w ramach jego możliwości finansowych) takich ilości chleba i mleka, dla których użyteczność jest największa. Przedstawić opisane zadanie jako problem programowania matematycznego i rozwiązać go graficznie. Jak zmieni się rozwiązanie, gdy funkcja użyteczności przybierze postać $u(x,y) = \min\{x,y\}$.

2. Płaszczyzna $x + y + z = 24$ przecina paraboloidę $z = x^2 + y^2$ wzdłuż elipsy. Przedstawić zadanie wyznaczenia najwyższego i najniższego punktu na tej elipsie jako zadanie minimalizacji z ograniczeniami.

3. Pudło w kształcie prostopadłościanu bez wieka jest wykonane z blachy o powierzchni 6 m^2. Przedstawić zadanie wyznaczenia wymiarów pudła, przy których jego objętość jest największa jako zadanie minimalizacji z ograniczeniami.

4. Inwestor ma zamiar utworzyć portfel złożony z dwóch akcji A_1 i A_2, mających odpowiednio średnie stopy zwrotu $R_1 = 0,1$ i $R_2 = 0,2$ oraz ryzyko $s_1 = 0,1$ i $s_2 = 0,3$. Korelacja między tymi akcjami wynosi $\rho_{12} = -0,5$. Funkcja użyteczności inwestora ma postać $u(s,R) = -s + 2R$. Inwestor powinien utworzyć portfel maksymalizujący funkcję użyteczności. Sformułować powyższy problem w postaci zadania minimalizacji z ograniczeniami. Wykonać odpowiedni rysunek przedstawiający zbiór rozwiązań dopuszczalnych i poziomice funkcji celu oraz wyznaczyć geometrycznie rozwiązanie optymalne. **Wskazówka**. Niech X_1 i X_2 będą zmiennymi losowymi wyrażającymi zwroty akcji A_1 i A_2. Wówczas $R_i = EX_i$, $s_i = \sqrt{Var(X_i)}$, $i = 1,2$, oraz $\rho_{12} = cov(X_1,X_2)/(s_1 s_2)$. Jeśli określimy wagi w_1 i w_2 stanowiący udziały poszczególnych akcji zakupionych przez inwestora, to zwrot powstałego w ten sposób portfela jest zmienną losową $X = w_1X_1 + w_2X_2$. Wyznaczyć zwrot tego portfela $R = EX$ i ryzyko $s = \sqrt{Var(X)}$.

5. Przedstawić zadanie wyznaczenia rzutu ortogonalnego punktu $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ na hiperpłaszczyznę $H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = \beta\}$ jako zadanie minimalizacji różniczkowalnej z ograniczeniami.

6. Przedstawić zadanie znalezienia punktu y należącego do niepustego zbioru $C \subseteq \mathbb{R}^n$, który leży najbliżej zadanego punktu $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Czy zadanie to ma zawsze rozwiązanie? Czy rozwiązanie to (jeśli istnieje) jest zawsze jednoznacznie określone? Co powinniśmy założyć o C, aby odpowiedź na oba pytania była pozytywna?

7. Danych jest skończenie wiele półprzestrzeni $C_i = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x \leq \beta_i\}$, $i = 1,2,...,m$. Niech $C := \bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset$.

   (a) Przedstawić zadanie znalezienia punktu ze zbioru C jako zadanie minimalizacji różniczkowalnej bez ograniczeń.

   (b) Czy można to zadanie sformułować również w przypadku, gdy $C = \emptyset$?

(c) Należy wyznaczyć punkt $x \in C$ o minimalnej normie. Sprowadzić to zadanie do zadania minimalizacji różniczkowalnej z ograniczeniami.

8. Na krzywej o równaniu $x - y^2 - 1 = 0$ należy znaleźć punkt leżący najbliżej prostej o równaniu $-x + 2y - 2 = 0$. Przedstawić to zadanie jako problem minimalizacji z ograniczeniami i rozwiązać je graficznie.

9. Dane są funkcje różniczkowalne $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in I = \{1, ..., , m\}$ oraz $g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j \in J = \{1, 2, ...p\}$.

   (a) Sformułować zadanie minimalizacji nieróżniczkowalnej bez ograniczeń

$$\begin{array}{cc} \text{minimalizować} & f(x) = \max_{i \in I} f_i(x) \\ \text{względem} & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

   w postaci zadania minimalizacji różniczkowalnej z ograniczeniami. **Wskazówka**: wprowadzić zmienną pomocniczą u i zauważyć, że $f(x) \leq u$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f_i(x) \leq u$ dla $i \in I$.

   (b) * Sprowadzić zadanie

$$\begin{array}{cc} \text{minimalizować} & f(x) = \sum_{i=1}^{m} |f_i(x)| \\ \text{względem} & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

   do zadania opisanego w (a) i do zadania minimalizacji różniczkowalnej z ograniczeniami. **Wskazówka**: zauważyć, że $|y| = \max\{y, -y\}$.

   (c) * Sprowadzić zadanie

$$\begin{array}{cc} \text{minimalizować} & f(x) = \max_{i \in I} f_i(x) \\ \text{względem} & x \in \mathbb{R}^n \\ \text{przy ograniczeniu} & \sum_{j=1}^{p} |g_j(x)| \leq 1 \end{array}$$

   do zadania minimalizacji różniczkowalnej z ograniczeniami.

Optymalizacja – lista 2 – algebra liniowa i różniczkowanie w $\mathbb{R}^n$

1. Wyznaczyć rząd macierzy
$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 2 & -1 \\ 12 & 6 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Znaleźć wszystkie wartości własne i normę spektralną macierzy
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$
i macierzy A^{-1}.

3. Sprowadzić funkcję kwadratową $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}x^TAx$ do postaci symetrycznej, tzn. $f(x)=\frac{1}{2}x^TGx$, gdzie G jest macierzą symetryczną.

4. Zbadać określoność macierzy
$$A=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

5. Podać warunki równoważne dodatniej określoności macierzy symetrycznej. Korzystając z nich podać warunki równoważne ujemnej określoności macierzy symetrycznej. **Wskazówka**: skorzystać z faktu, że A jest ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy $-A$ jest dodatnio określona.

6. * Udowodnić następujący fakt: *Jeśli macierz symetryczna A typu $m\times m$ jest dodatnio określona, to istnieją stałe $m_1,m_2>0$ takie, że $m_1\|d\|^2\le d^TAd\le m_2\|d\|^2$ dla dowolnego wektora $d\in\mathbb{R}^m$.* Za stałe m_1,m_2 można przyjąć najmniejszą i największą wartość własną macierzy A.

7. * Udowodnić fakt: *Jeśli G jest macierzą dodatnio określoną, to zachodzi równość* $\operatorname{cond} G=\frac{\lambda_{\max}(G)}{\lambda_{\min}(G)}$.

8. Porównać tzw. wzory łańcuchowe na pochodne cząstkowe funkcji złożonej wielu zmiennych ze wzorem na gradient funkcji złożonej w postaci macierzowej podanym na wykładzie.

9. Korzystając ze wzorów łańcuchowych obliczyć:

   (a) pochodne cząstkowe funkcji $h=f\circ g$, gdzie funkcje $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ i $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dane są wzorami $f(x,y,z)=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $g(r,\varphi,\psi)=(r\cos\varphi\sin\psi, r\sin\varphi\sin\psi, z=r\cos\psi)$,

   (b) pochodną funkcji $q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określonej wzorem $q(t)=f(\bar{x}+ts)$, gdzie $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną, $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ i $s\in\mathbb{R}^n$.

10. * Korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu funkcji złożonej pokazać fakt: *Jeśli* $u, v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *są różniczkowalne w punkcie* $x \in \mathbb{R}^n$, *to funkcja* $u^T v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *jest różniczkowalna w punkcie* x *i zachodzi wzór:*

$$\nabla(u^T v) = (\nabla u) \cdot v + (\nabla v) \cdot u.$$

Wskazówka: zdefiniować funkcję wewnętrzną $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2m}$, $h(x) = \begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix}$ i funkcję zewnętrzną $f : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}$, $f(y) = y_1 y_{m+1} + ... y_m y_{2m}$.

11. Niech f będzie funkcją określoną na przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Pokazać, że:

   (a) jeśli $f(x) = a^T x$, gdzie $a \in \mathbb{R}^n$, to $\nabla f(x) = a$ i $\nabla^2 f(x) = 0$,

   (b) jeśli $f(x) = Ax$, gdzie A jest macierzą typu $m \times n$, to $\nabla f(x) = A^T$, czyli A jest macierzą Jacobiego funkcji f,

   (c) jeśli $p(x) = s^T \nabla f(x)$, gdzie $s \in \mathbb{R}^n$ i f jest funkcją dwukrotnie różniczkowalną, to $\nabla p(x) = \nabla^2 f(x) s$,

   (d) jeśli $f(x) = x^T A x$, gdzie A jest macierzą typu $n \times n$, to $\nabla f(x) = (A + A^T)x$ i $\nabla^2 f(x) = A^T + A$,

   (e) jeśli $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c$, gdzie A jest macierzą symetryczną, $b \in \mathbb{R}^n$ i $c \in \mathbb{R}$ (czyli f jest funkcją kwadratową), to $\nabla f(x) = Ax + b$ i $\nabla^2 f(x) = A$.

12. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna w punkcie $x \in \mathbb{R}^n$ oraz $\nabla f(x) \neq 0$. Pokazać, że pochodna kierunkowa $f'(x, s)$ osiąga swoje maksimum na $B(0, 1)$ dla $s = g / \|g\|$, gdzie $g = \nabla f(x)$ (jest to tzw. *kierunek najszybszego wzrostu*). Dla jakiego $s \in B(0, 1)$ pochodna ta osiąga minimum (tzw. *kierunek najszybszego spadku*)? Wyznaczyć kierunki wzrostu i kierunki spadku funkcji f.

13. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie dana równością $f(x, y) = 9x^2 + 16y^2$ i niech $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$. Wyznaczyć zbiór T kierunków stycznych zbioru $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + 16y^2 = 25\}$ w punkcie $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$.

14. Niech $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $r(x, y) = x^2 + y^2 - 25$ i niech $\bar{y} = 3$. Dla jakich $\bar{x}$ istnieje dokładnie jedna funkcja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $r(h(y), y) = 0$ w pewnym otoczeniu $\bar{y}$? Podać wzór funkcji h.

15. * Niech $r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie dana wzorem $r(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 26, x + 2y + 3z - 14)$ i niech $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (3, 4, 1)$. Czy istnieje dokładnie jedna funkcja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ taka, że $r(h_1(z), h_2(z), z) = 0$ w pewnym otoczeniu $\bar{z}$? Podać wzór funkcji h.

16. * Niech $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną i niech $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ będzie punktem takim, że $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$. Pokazać, że

$$T_{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = f(\bar{x})\}}(\bar{x}) = \{s \in \mathbb{R}^n : s^T \nabla f(\bar{x}) = 0\},$$

czyli zbiorem kierunków stycznych do poziomicy funkcji f w punkcie $\bar{x}$ jest hiperpłaszczyzna styczna do wykresu funkcji f w tym punkcie (mówimy również, że gradient $\nabla f(\bar{x})$ jest ortogonalny do poziomicy $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = f(\bar{x})\}$ w punkcie $\bar{x}$). **Wskazówka**: skorzystać z definicji kierunku stycznego i z definicji różniczkowalności funkcji f w punkcie $\bar{x}$.

17. Znaleźć zbiór kierunków spadkowych $D(x, y)$ funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x, y) = xy$ w punkcie $(\bar{x}, \bar{y}) = (2, 1)$.

18. * Pokazać, że jeśli dla funkcji różniczkowalnej $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $s^T \nabla f(x) < 0$, to s jest kierunkiem spadku funkcji f w punkcie x. Wskazówka: skorzystać z definicji różniczkowalności.

19. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną w punkcie $\bar{x}$ i niech $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$. Pokazać, że jeśli H jest macierzą dodatnio określoną, to wektor $s = -H\nabla f(\bar{x})$ jest kierunkiem spadku funkcji f w punkcie $\bar{x}$.

Optymalizacja – lista 3 – zbiory wypukłe

1. Pokazać, że następujące podzbiory przestrzeni $\mathbb{R}^n$ są wypukłe:

   (a) hiperpłaszczyzna
   $$H(a,\alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle = \alpha\},$$
   gdzie $a \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\langle\cdot,\cdot\rangle$ oznacza dowolny iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$, np $\langle x, y\rangle = x^T y$ (standardowy iloczyn skalrny),

   (b) półprzestrzeń
   $$H_-(a,\alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle \leq \alpha\},$$
   gdzie $a \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

   (c) przekrój dowolnej rodziny (skończonej lub nieskończonej) zbiorów wypukłych,

   (d) podprzestrzeń afiniczna,

   (e) zbiór wielościenny – przekrój skończonej liczby półprzestrzeni,

   (f) sympleks standardowy
   $$\Delta_m := \{y \in \mathbb{R}^m : y_i \geq 0, i = 1, 2, ..., m, \sum_{i=1}^{m} y_i = 1\},$$

   (g) kula
   $$B(z,\rho) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - z\| \leq \rho\},$$
   gdzie $z \in \mathbb{R}^n, \rho > 0$ i $\|\cdot\|$ jest dowolną normą w $\mathbb{R}^n$,

   (h) *elipsoida* (ang. *ellipsoid*) $J(D, \bar{x}, \rho) := \{x \in \mathbb{R}^n : (x - \bar{x})^\top D(x - \bar{x}) \leq \rho\}$, gdzie D jest macierzą dodatnio określoną, , $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\rho > 0$,

   (i) *stożek wypukły* (ang. *convex cone*), czyli podzbiór $C \subseteq \mathbb{R}^n$ spełniający warunki: (i) $x \in C$ i $\alpha > 0 \Longrightarrow \alpha x \in C$, (ii) $x, y \in C \Longrightarrow x + y \in C$,

   (j) stożek sprzężony do zbioru $K \subseteq \mathbb{R}^n$,
   $$K^* := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle y, x\rangle \leq 0 \text{ dla dowolnego } y \in K\};$$

   (k) stożek normalny do zbioru wypukłego C w punkcie $x \in C$,
   $$N_C(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, z - x\rangle \leq 0 \text{ dla dowolnego } z \in C\},$$

   (l) produkt kartezjański zbiorów wypukłych,

   (m) * obraz zbioru wypukłego $C \subseteq \mathbb{R}^n$ dla operatora liniowego $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A(C) \subseteq \mathbb{R}^m$, w szczególności $P_V(C)$ – rzut prostokątny zbioru wypukłego C na podprzestrzeń liniową $V \subseteq \mathbb{R}^n$; czy $A(C)$ jest domknięty, jeśli C jest domknięty?

   (n) * przeciwobraz zbioru wypukłego $Q \subseteq \mathbb{R}^m$ dla operatora liniowego $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A^{-1}(Q) \subseteq \mathbb{R}^n$,

(o) podpoziomica funkcji wypukłej $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$S(f, \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \alpha\},$$

gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$,

(p) epigraf funkcji wypukłej $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\operatorname{epi} f = \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : r \geq f(x)\},$$

(q) zbiór minimizerów funkcji wypukłej $f : X \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname*{Argmin}_{x \in X} f(x) := \{z \in X : f(z) \leq f(x) \text{ dla dowolnego } x \in X\}.$$

2. Pokazać, że podzbiór $C \subset \mathbb{R}^n$ jest wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy do C należy dowolna kombinacja wypukła jego elementów.

3. * Otoczką wypukłą zbioru $S \subseteq \mathbb{R}^n$ nazywamy najmniejszy zbiór wypukły zawierający S i oznaczamay ją symbolem $\operatorname{conv} S$. Pokazać, że

$$\operatorname{conv} S = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, \text{ gdzie } m \in \mathbf{N}, x_i \in S, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, ..., m, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\}.$$

4. * Pokazać, że jeśli zbiór $C \subseteq \mathbb{R}^n$ jest wypukły, to zarówno jego wnętrze $\operatorname{int} C$, jak i jego domknięcie $\operatorname{cl} C$ są wypukłe.

5. * Pokazać, że jeśli zbiory $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ są wypukłe i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, to zbiór $\alpha A + \beta B$ jest wypukły.

6. * Wyznaczyć zbiory punktów ekstremalnych dla następujących zbiorów wypukłych.

   (a) $K = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, przy czym $a \leq b$,
   (b) $K = \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$,
   (c) $K = \Delta_n \subseteq \mathbb{R}^n$,
   (d) $K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$, gdzie A jest macierzą typu $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

7. * Pokazać istnienie rzutu metrycznego na zbiór niepusty, domknięty i wypukły $C \subseteq \mathbb{R}^n$ korzystając z ciągłości normy i z twierdzenia Weierstrassa.

8. Korzystając z charakteryzacji rzutu metrycznego sprawdzić, że:

   (a) Jeśli C jest hiperpłaszczyzną, tzn. $C = H(a, \beta) := \{z \in \mathbb{R}^n : \langle a, z \rangle = \beta\}$, gdzie $a \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$, to zachodzi wzór

$$P_C(x) = x - \frac{\langle a, x \rangle - \beta}{\|a\|^2} a;$$

   (b) Jeśli C jest półprzestrzenią, tzn. $C = H_-(a, \beta) := \{z \in \mathbb{R}^n : \langle a, z \rangle \leq \beta\}$, gdzie $a \in \mathbb{R}^n$ i $\beta \in \mathbb{R}$, to zachodzi wzór

$$P_C(x) = x - \frac{(\langle a, x \rangle - \beta)_+}{\|a\|^2} a;$$

(c) Jeśli $C \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zbiorem rozwiązań układu równań liniowych, tzn. $C = \{y \in \mathbb{R}^n : Ay = b\}$, gdzie A jest macierzą typu $m \times n$ pełnego rzędu wierszowego i $b \in \mathbb{R}^m$, to zachodzi wzór
$$P_C(x) = x - A^\top (AA^\top)^{-1}(Ax - b);$$

(d) Jeśli $C \subseteq \mathbb{R}^n$ jest kulą, tzn. $C = B(\bar{x}, r) := \{z \in \mathbb{R}^n : \|z - \bar{x}\| \leq r\}$, gdzie $\|\cdot\|$ jest normą euklidesową, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ i $r > 0$, to zachodzi wzór
$$P_C(x) = \begin{cases} x & \text{gdy } \|x - \bar{x}\| \leq r \\ \bar{x} + \frac{r}{\|x-\bar{x}\|}(x - \bar{x}) & \text{gdy } \|x - \bar{x}\| > r. \end{cases}$$

Czy wzór ten jest słuszny dla norm innych niż euklidesowa? Podać odpowiednie przykłady.

9. * Niech $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Pokazać, że
$$\operatorname{cone} \operatorname{conv} S = \operatorname{cone} S.$$

Czy $\operatorname{cone} S$ jest domknięty, jeśli S jest domknięty. Czy jest on domknięty, jeśli S jest zwarty?

Optymalizacja – lista 4 – funkcje wypukłe

1. Niech $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, i = 1, ..., m$, będą funkcjami wypukłymi i $\alpha_i > 0$ dla $i = 1, ..., m$. Pokazać, że funkcja $f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i$ jest wypukła. Jeśli ponadto przynajmniej jedna z funkcji f_i, $i = 1, ..., m$, jest ściśle wypukła względnie mocno wypukła, to funkcja f jest również ściśle wypukła względnie mocno wypukła.

2. Niech $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, i \in I$ będą funkcjami wypukłymi (mocno wypukłymi ze stałą mocnej wypukłości $c > 0$). Pokazać, że funkcja $f = \sup_{i \in I} f_i$ jest wypukła (mocno wypukła ze stałą mocnej wypukłości $c > 0$). Czy z faktu, że funkcje f_i są ściśle wypukłe wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła? Odpowiedź uzasadnić.

3. Niech $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą zaś $A : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ odwzorowaniem afinicznym. Pokazać, że funkcja $h : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $h = f \circ A$ jest wypukła.

4. Czy funkcja $f(x, y) = (2x - 3y)^{10}$ jest wypukła? Odpowiedź uzasadnić.

5. Niech $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow D$ będzie funkcją wypukłą, gdzie $D \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem wypukłym, zaś $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcją wypukłą niemalejącą. Pokazać, że funkcja $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $h = g \circ f$ jest wypukła. Jeśli ponadto g jest funkcją rosnącą i f jest funkcją ściśle wypukłą, to funkcja h jest ściśle wypukła.

6. Niech $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ będzie funkcją (ściśle) wypukłą. Pokazać, że f^2 jest funkcją (ściśle) wypukłą.

7. Czy funkcja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem $f(x, y, z) = (6x^2 + y^4 + z^2)^{3/2}$ jest wypukła? Odpowiedź uzasadnić.

8. * Niech $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ będą funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi i wypukłymi. Pokazać, że jeśli obie funkcje mają identyczne przedziały, w których są niemalejące względnie nierosnące, to $h := fg$ jest funkcją wypukłą. Pokazać, że własność ta jest również prawdziwa bez zakładania różniczkowalności.

9. Pokazać, że dowolna norma $\|\cdot\|$ w $\mathbb{R}^n$ jest funkcją wypukłą.

10. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą (ściśle wypukłą), zaś $\|\cdot\|$ normą euklidesową w $\mathbb{R}^n$. Które z poniższych funkcji są wypukłe (ściśle wypukłe, mocno wypukłe)?

    (a) $h(x) = \|x\|$,
    (b) $h(x) = \|x\|^2$,
    (c) $h(x) = \|f(x)\|$,
    (d) $h(x) = \|f(x)\|^2$,
    (e) $h(x) = (f(x))^2$.

11. * Pokazać, że odległość od zbioru wypukłego $C \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$d(x, C) := \inf_{y \in C} \|y - x\|$$

jest funkcją wypukłą. W konsekwencji, funkcja $d^2(\cdot, C)$ jest wypukła.

12. * Pokazać, że kwadrat normy euklidesowej jest funkcją mocno wypukłą ze stałą mocnej wypukłości równą 2. **Wskazówka**: Pokazać, że zachodzi równość

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y\|^2 = (1-\lambda)\|x\|^2 + \lambda\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2$$

13. Podać przykład funkcji wypukłej $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, która nie jest ciągła.

14. Korzystając z własności funkcji wypukłej różniczkowalnej pokazać wypukłość (ścisłą, mocną) względnie wklęsłość (ścisłą, mocną) następujących funkcji $f : X \to \mathbb{R}$

   (a) funkcja potęgowa, $f(x) = |x|^\alpha$, gdzie $\alpha \geq 1$, $X = \mathbb{R}$,

   (b) funkcja wykładnicza $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, gdzie $a \geq 0$, $X = \mathbb{R}$,

   (c) funkcja logarytmiczna, $f(x) = \ln x$, $X = \mathbb{R}_{++}$,

   (d) entropia, $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i$, $X = \mathbb{R}^n_{++}$,

   (e) funkcja $f(x) = \frac{1}{2}x^T A x$, gdzie $X = \mathbb{R}^n$, A jest macierzą symetryczną nieujemnie (dodatnio) określoną,

   (f) funkcja $f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2$, gdzie $X = \mathbb{R}^n$, A jest macierzą typu $m \times n$ pełnego rzędu wierszowego (kolumnowego) i $b \in \mathbb{R}^m$,

   (g) * średnia geometryczna, $f(x) = (\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n})$, $X = \mathbb{R}^n_{++}$. **Wskazówka**: Wyznaczyć hesjan funkcji f i pokazać jego nieujemną określoność ($s^T \nabla^2 f(x) s \geq 0$ dla dowolnego $s = (\sigma_1, ..., \sigma_n)^T$) korzystając z nierówności

$$\left(\sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j}{x_j} \right)^2 \leq n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\sigma_j}{x_j} \right)^2$$

   wynikającej z nierówności Cauchy'ego–Schwarza dla normy euklidesowej.

   (h) $f(x,y) = (e^{x^2+y^2} + \alpha)^2$, gdzie $\alpha \geq -1$, $X = \mathbb{R}^2$. Wskazówka: Skorzystać z zadania 5.

   (i) $f(x) = |x| - \ln(1 + |x|)$. **Wskazówka:** Pokazać że f jest dwukrotnie różniczkowalna i $f''(x) > 0$.

15. Pokazać wklęsłość poniższych funkcji $f : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ występujących w ekonomii:

   (a) funkcja użyteczności postaci $f(x) = \min\{\frac{x_j}{a_j} : j = 1, ..., n\}$, gdzie $a_j > 0$,

   (b) * funkcja produkcji Cobba–Douglasa $f(x) = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} ... x_n^{\beta_n}$, gdzie $\beta_j > 0$, $\sum_{j=1}^n \beta_j \leq 1$,

   (c) * funkcja użyteczności postaci $f(x) = (x_1 x_2 ... x_n)^{\frac{1}{n}}$,

   (d) * funkcja CES (ang. *constant elasticity of substitution*) $f(x) = (\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^p)^{\frac{1}{p}}$, $\alpha_j > 0$, gdzie $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$, $p \in (-\infty, 1) \setminus \{0\}$.

Wskazówka: W punkcie b) wyznaczyć hesjan funkcji $-f$ i pokazać jego nieujemną określoność ($s^T \nabla^2 f(x) s \geq 0$ dla dowolnego $s = (\sigma_1, ..., \sigma_n)^T$) korzystając z nierówności

$$\left(\sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j \beta_j}{x_j} \right)^2 \leq \sum_{j=1}^n \left(\frac{\sigma_j \sqrt{\beta_j}}{x_j} \right)^2 \left(\sum_{j=1}^n \beta_j \right)$$

wynikającej z nierówności Cauchy'ego–Schwarza dla normy euklidesowej. W punkcie d) wyznaczyć gradient funkcji $-f$ i pokazać jego monotoniczność. Czy funkcja CES jest również wklęsła bez założenia $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$?

Optymalizacja – lista 5 – minimalizacja bez ograniczeń

1. Badając gradient wyznaczyć punkty stacjonarne poniższych funkcji. W punktach tych wyznaczyć hesjan. Czy i jak jest on określony. W których z nich funkcja osiąga minimum, a w których maksimum.

   (a) $f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$

   (b) $f(x, y) = \frac{1}{4}(x - 5)^2 + (y - 6)^2$

   (c) $f(x, y) = (x - 2)^4 + (x - 2y)^2$

   (d) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 4y^2 + 6x$,

   (e) $f(x, y) = x^3 - y^3 - 9x$,

   (f) $f(x, y) = (x - y)^2$,

   (g) $f(x, y) = (x + y)y$,

   (h) $f(x, y, z) = -x^2 - 6y^2 - 23z^2 - 4xy + 6xz + 20yz$,

   (i) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$,

   (j) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 3xy - 5x + y$.

2. Wyznaczyć punkty stacjonarne funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 - 6xy(x - y - 1)$. Który z nich jest lokalnym minimum, który lokalnym maksimum, a który ani żadnym z nich.

3. Pokazać, że funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (y - x^2)^2 + x^5$ posiada wyłącznie punkty stacjonarne, które nie są ani minimami ani maksimami lokalnymi.

4. Znaleźć punkt stacjonarny funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 2x^3 + x^4$, w którym funkcja osiąga minimum globalne. **Wskazówka**: zauważyć, że funkcja f jest koercytywna.

5. Wyznaczyć gradient i hesjan funkcji Rosenbrooka $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

   $$f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2.$$

   Sprawdzić, że w punkcie $(x^*, y^*) = (1, 1)$ funkcja osiąga minimum. Pokazać, że hesjan $G(x, y)$ jest macierzą osobliwą wtedy i tylko wtedy gdy $y - x^2 = 0.005$. Pokazać, że stąd wynika, że hesjan $G(x, y)$ jest macierzą dodatnią określona dla wszystkich punktów x takich, że $f(x, y) < 0.0025$.

6. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją kwadratową postaci $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$, gdzie A jest macierzą określoną dodatnio, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, i niech $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

   (a) Pokazać, że funkcja ta ma jednoznacznie określone minimum $x^* = \bar{x} - (\nabla^2 f(\bar{x}))^{-1} \nabla f(\bar{x})$.

   (b) Pokazać, że metoda Newtona zastosowana do funkcji f jest zbieżna w jednej iteracji do punkt x^*.

Optymalizacja – lista 6 – minimalizacja z ograniczeniami

1. Wyznaczyć rozwiązanie zadania:

$$\begin{array}{l} \text{minimalizować } f(x,y) = x + y \\ \text{przy ograniczeniu } x^2 - y = 0 \end{array}$$

   graficznie i przez eliminację y i zauważyć, że otrzymaliśmy to samo rozwiązanie.

2. Wyznaczyć rozwiązanie zadania:

$$\begin{array}{l} \text{minimalizować } f(x,y) = -x - y \\ \text{przy ograniczeniu } x^2 + y^2 = 1 \end{array}$$

   graficznie i przez eliminację x i zauważyć, że otrzymaliśmy to samo rozwiązanie. Przedyskutować co się jednak zdarzy, gdy pierwiastek, który trzeba wyznaczyć zaopatrzyć w znak ujemny.

3. Wyznaczyć rozwiązanie zadania:

$$\begin{array}{l} \text{minimalizować } f(x,y) = x^2 + y^2 \\ \text{przy ograniczeniu } (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1 \end{array}$$

   graficznie i przez eliminację x i zauważyć, że otrzymaliśmy to samo rozwiązanie.

4. Wyznaczyć rozwiązanie zadania:

$$\begin{array}{l} \text{minimalizować } f(x,y) = x^2 + y^2 \\ \text{przy ograniczeniu } (x-1)^3 - y^2 = 0 \end{array}$$

   graficznie i przez eliminację y. Rozwiązać to samo zadanie przez eliminację x. Wyciągnąć odpowiednie wnioski.

5. Rozwiązać powyższe zadania korzystając z warunków koniecznych i warunków wystarczających optymalności.

6. Korzystając z warunków koniecznych i warunków wystarczających optymalności rozwiązać zadania:

   (a)

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizować} & x^2 + 4y^2 \\ \text{przy ograniczeniu} & x - y + 2 \le 0. \end{array}$$

   (b)

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizować} & 2x + y \\ \text{przy ograniczeniu} & x^2 + y^2 - 1 \le 0. \end{array}$$

   (c)

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizować} & -x - y \\ \text{przy ograniczeniach} & x^2 - y \le 0, \\ & x^2 + y^2 - 1 \le 0. \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizować} & -x^2-y^2 \\ \text{przy ograniczeniach} & -\frac{1}{2} \le x \le 2, \\ & -\frac{3}{2} \le y \le \frac{3}{2}. \end{array}$$

(e)

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizować} & (x-6)^2+(y-8)^2 \\ \text{przy ograniczeniu} & x+y=7. \end{array}$$

(f)

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizować} & ax^2-y \\ \text{przy ograniczeniach} & -x^2-(y-1)^2+1 \le 0, \\ & (x+1)^2+y^2-1 \le 0. \end{array}$$

dla $a=\frac{1}{4}$ i dla $a=1$.

(g)

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizować} & \frac{1}{4}x^2-y \\ \text{przy ograniczeniach} & -x^2-(y-1)^2+1 \le 0, \\ & -1 \le x \le 1, \\ & -\frac{1}{2} \le y \le 1. \end{array}$$

(h)

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizować} & xy^2 \\ \text{przy ograniczeniach} & x^2+y^2-2 \le 0. \end{array}$$

(i)

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizować} & \frac{10}{3}xy+\frac{1}{6}x \\ \text{przy ograniczeniach} & x^2+\frac{5}{2}y^2-\frac{19}{16} \le 0, \\ & -x+y+\frac{6}{10} \le 0. \end{array}$$

(j)

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizować} & (x-2)^2+y^2 \\ \text{przy ograniczeniach} & (1-x)^3+y \le 0, \\ & -y \le 0. \end{array}$$

(k)

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizować} & (x-2)^2+y^2 \\ \text{przy ograniczeniach} & -(1-x)^3+y=0, \\ & (1-x)^3+y=0. \end{array}$$

Rozwiązać te zadania również graficznie i porównać otrzymane wyniki.

7. Dany jest problem programowania matematycznego

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizować} & f(x,y)=(x-4)^2+(y-a)^2 \\ \text{przy ograniczeniach:} & x^2+(y-2)^2 \le 4 \\ & x^2+y \le 4 \\ & 3x-y \ge 0 \end{array}$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$.

(a) Rozwiązać to zadanie graficznie dla $a = 0$, dla $a = 1$ i dla $a = 5$.

(b) Napisać dla tego problemu postać funkcji Lagrange'a.

(c) Czy dla tego problemu spełnione są warunki regularności?

(d) Wyznaczyć punkt Kuhna-Tuckera dla każdej z powyższych wartości a.

(e) Czy punkt ten jest rozwiązaniem optymalnym? Odpowiedź uzasadnić.

(f) Przedstawić klasyfikację rozwiązań w zależności od $a \in \mathbb{R}$.

8. Płaszczyzna $x + y + z = 24$ przecina paraboloidę $z = x^2 + y^2$ wzdłuż elipsy. Znaleźć najwyższy i najniższy punkt na tej elipsie.

9. Na krzywej o równaniu $x - y^2 - 1 = 0$ wyznaczyć punkt leżący najbliżej prostej o równaniu $-x + 2y - 2 = 0$ (por. zadanie 8 z listy 1)

10. Dane są dwie płaszczyzny w $\mathbb{R}^3$ o równaniach

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6, \\ x + y + z &= 1. \end{aligned}$$

Wyznaczyć punkt na prostej będącej przecięciem tych płaszczyzn leżący najbliżej punktu $p = (1, 1, 1)$.

11. Dane jest następujące zadanie programowania liniowego

$$\begin{array}{rr} \text{maksymalizować} & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{przy ograniczeniach} & x_2 \leq 2x_1 + 4 \\ & x_2 \leq 7 - x_1 \\ & 9x_1 + 6x_2 \leq 54 \\ & x_1 - 4 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

(a) Rozwiązać graficznie zadanie (P);

(b) Podać postać warunków Kuhna–Tuckera dla tego zadania;

(c) Czy punkt $(x, y) = (2, 5, 0, 0, 1/3, 0, 0, 0)$ jest punktem Kuhna–Tuckera?

(d) Czy w punkcie tym spełniony jest któryś z warunków regularności?

(e) Cy punkt tej jest rozwiązaniem zadania?

12. Dane jest następujące zadanie: Walec w $\mathbb{R}^3$, którego podstawa leży na płaszczyźnie $z = 0$ i jest okręgiem o równaniu $x^2 + y^2 = 1$ został przecięty płaszczyzną przechodzącą przez punkty $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$ i $(0, 0, 1)$. Należy znaleźć najwyższy i najniższy punkt na krzywej będącej częścią wspólną tych powierzchni.

(a) Przedstawić to zadanie jako zadanie minimalizacji różniczkowalnej z ograniczeniami;

(b) Rozwiązać graficznie to zadanie;

(c) Podać postać warunków Kuhna–Tuckera dla tego zadania.

(d) Rozwiązać to zadanie korzystając z warunków koniecznych i z warunków wystarczających optymalności.

13. Sprawdzić, że dla zadania

$$\begin{array}{rr} \text{minimalizować} & x_2 \\ \text{względem} & x \in \mathbb{R}^2 \\ \text{przy ograniczeniach} & -x_2 \leq 0 \\ & x_1 - x_2 \leq 0 \\ & -x_1 - x_2 \leq 0 \end{array}$$

w punkcie $x = 0$ spełniony jest warunek regularności Mangasariana–Fromovitza (MFCQ), natomiast nie jest spełniony w tym punkcie warunek regularności Fiacco–McCormicka (LICQ).

Optymalizacja – lista 7 – minimalizacja z ograniczeniami -c.d.

1. Każda z poniższych funkcji posiada zarówno minumum, jak i maksimum globalne przy zadanych ograniczeniach. Wyznaczyć te maksima i minima.

   (a) $f(x,y) = xy$, $c(x,y) = 4x^2 + y^2 = 8$;

   (b) $f(x,y,z) = xy^2z$, $c(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$;

   (c) $f(x,y,z) = \ln(x^2+1) + \ln(y^2+1) + \ln(z^2+1)$, $c(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$;

   (d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $c(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 = 1$

2. Pudło w kształcie prostopadłościanu bez wieka jest wykonane z blachy o powierzchni 6 m^2. Wyznaczyć wymiary pudła, przy których jego objętość jest największa.

3. Znaleźć punkt na sferze $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, który leży: (a) najbliżej, (b) najdalej od punktu $P(1,1,3)$.

4. * Wyznaczyć maksymalną wartość funkcji $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$ na sympleksie standardowym Δ_m. Wywnioskować stąd, że średnia geometryczna n liczb nieujemnych jest zawsze mniejsza lub równa od ich średniej arytmetycznej. Kiedy zachodzi równość tych średnich?

5. * Niech $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ oznacza standardowy iloczyn skalarny wektorów $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, zaś $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ oznacza normę wektora x. Wyznaczyć minimalną i maksymalną wartość funkcji $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ zadanej równością $f(x,y) = \langle x, y \rangle$ przy ograniczeniach $\|x\|^2 = 1$, $\|y\|^2 = 1$. Korzystając z otrzymanego wyniku pokazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a_i, b_i, $i = 1, 2, ..., n$ zachodzą nierówności

$$-\|a\| \cdot \|b\| \leq \langle a, b \rangle \leq \|a\| \cdot \|b\|, \tag{1}$$

   gdzie $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$, zwana nierównością Cauchy'ego–Schwarza. Kiedy zachodzi równość w (1)? Czy nierówność tę da się pokazać prościej? **Wskazówka**: Zdefiniować $f(\lambda) = \|x - \lambda y\|^2$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$ i skorzystać z własności iloczynu skalarnego. Zauważyć przy okazji, że dowód nierówności Cauchy'ego–Schwarza przy pomocy ostatniej metody jest słuszny dla dowolnego iloczynu skalarnego zdefiniowanego na dowolnej przestrzeni liniowej.

6. * Niech x oznacza nakład kapitału, zaś y – nakład pracy (obie wielkości wyrażone są w jednostkach pieniężnych). Funkcja produkcji Cobba–Douglasa $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ wyrażająca wielkość produkcji zdefiniowana jest równością $f(x,y) = cx^\alpha y^{1-\alpha}$, gdzie $c > 0$ i $\alpha \in (0,1)$.

   (a) Pokazać, że maksymalna produkcja przy zadanym budżecie b producenta, czyli przy ograniczeniu $x + y = b$, jest osiągnięta, gdy $x = \alpha b$ zaś $y = (1-\alpha)b$;

   (b) Załóżmy, że wielkość produkcji jest ustalona, tzn. $cx^\alpha y^{1-\alpha} = d$. Przy jakim nakładzie kapitału x i nakładzie pracy y koszt produkcji $b = x + y$ jest minimalny?

Optymalizacja – lista 8 – dualizm

1. Niech A będzie macierzą typu $m \times n$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Wyznaczyć postaci zadań dualnych w sensie Wolfe'a do następujących zadań programowania liniowego:

   (a)
$$\begin{array}{ll} \text{maksymalizować} & c^T x \\ \text{względem} & x \in \mathbb{R}^n \\ \text{przy ograniczeniach} & Ax \leq b, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

   (b)
$$\begin{array}{ll} \text{minimalizować} & b^T y \\ \text{względem} & y \in \mathbb{R}^m \\ \text{przy ograniczeniach} & A^T y \geq c, \\ & y \geq 0 \end{array}$$

   (c)
$$\begin{array}{ll} \text{maksymalizować} & c^T x \\ \text{względem} & x \in \mathbb{R}^n \\ \text{przy ograniczeniach} & Ax = b, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

   (d)
$$\begin{array}{ll} \text{minimalizować} & b^T y \\ \text{względem} & y \in \mathbb{R}^m \\ \text{przy ograniczeniach} & A^T y \geq c. \end{array}$$

2. Niech A będzie macierzą typu $m \times n$, G – macierzą dodatnie określona typu $n \times n$, $g \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Wyznaczyć postaci zadania dualnego w sensie Wolfe'a do następującego zadania programowania kwadratowego

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizować} & \frac{1}{2} x^T G x + g^T x \\ \text{względem} & x \in \mathbb{R}^n \\ \text{przy ograniczeniach} & Ax \leq b. \end{array}$$

Optymalizacja – lista 9 – warunki rzędu 2. dla minimalizacji z ograniczeniami

1. Dane jest zadanie minimalizacji kwadratowej

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizować} & f(x) = \frac{1}{2}x^T Gx + c^T x \\ \text{względem} & x \in \mathbb{R}^n \\ \text{przy ograniczeniach} & Ax = b, \end{array}$$

gdzie G jest macierzą typu $n \times n$, A jest macierzą typu $m \times n$ pełnego rzędu wierszowego i $b \in \mathbb{R}^m$. Napisać dla tego zadania warunki konieczne i warunki wystarczające optymalności z wykorzystaniem hesjanu zredukowanego i hesjanu obrzeżonego.

2. Rozważmy zadanie

$$\begin{array}{rr} \text{minimalizować} & f(x_1, x_2) = x_1^2 - (x_2 - 1)^2 \\ \text{względem} & x = (x_1, x_2) \\ \text{przy ograniczeniu} & x_1^2 + x_2^2 = 1. \end{array}$$

   (a) Rozwiązać to zadanie graficznie.

   (b) Rozwiązać to zadanie wykorzystując warunki wystarczające rzędu drugiego dla zadania z ograniczeniami równościowymi.

3. Wyznaczyć punkty KT dla zadania

$$\begin{array}{rr} \text{minimalizować} & f(x) = \frac{1}{2}[(x_1 - 1)^2 + x_2^2] \\ \text{względem} & x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ \text{przy ograniczeniach} & c(x) = -x_1 + \beta\xi_2^2 = 0, \end{array}$$

gdzie $\beta > 0$ jest parametrem. Zauważyć, że dla dowolnego $\beta > 0$ punktowi $x^* = (0, 0)$ odpowiada mnożnik Lagrange'a.

   (a) Dla jakich β spełniony jest warunek konieczny rzędu drugiego w punkcie x^*?

   (b) Dla jakich β spełniony jest warunek wystarczający rzędu drugiego w punkcie x^*?

   (c) Dla jakich β punkt x^* jest rozwiązaniem zadania?

4. Rozważmy zadanie

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizować} & f(x) = x_1^2 + x_2^2, \\ \text{względem} & x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \\ \text{przy ograniczeniach} & 4x_1 + 3x_2 \geq 25, \\ & x_1 \leq 4. \end{array}$$

   (a) Rozwiązać to zadanie graficznie.

   (b) Rozwiązać to zadanie wykorzystując warunki wystarczające rzędu drugiego dla zadania z ograniczeniami nierównościowymi.

Rozwiązania zadań

Lista 3

zad 11 (c)

Funkcja $f(x) = x_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\beta_n}$, gdzie $\beta_j > 0$, $\sum_{j=1}^n \beta_j \leq 1$, jest wklęsła.

Dowód. Mamy

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \beta_i \frac{f(x)}{x_i}$$

a więc

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} = \begin{cases} \beta_i \beta_j f(x) \frac{1}{x_i x_j} & \text{dla } i \neq j \\ \beta_i(\beta_i - 1) f(x) \frac{1}{x_i^2} & \text{dla } i = j \end{cases},$$

czyli

$$\nabla^2 f(x) = f(x) \left(\begin{bmatrix} \frac{\beta_1^2}{x_1^2} & \frac{\beta_1\beta_2}{x_1x_2} & \cdots & \frac{\beta_1\beta_n}{x_1x_n} \\ \frac{\beta_2\beta_1}{x_2x_1} & \frac{\beta_2^2}{x_2^2} & \cdots & \frac{\beta_2\beta_n}{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta_n\beta_1}{x_nx_1} & \frac{\beta_n\beta_2}{x_nx_2} & \cdots & \frac{\beta_n^2}{x_n^2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\beta_1}{x_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\beta_2}{x_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\beta_n}{x_n^2} \end{bmatrix} \right).$$

lub inaczej

$$\nabla^2 f(x) = f(x)(vv^T - (\operatorname{diag} u)^2)$$

gdzie $u = (\sqrt{\beta_1}/x_1, \sqrt{\beta_2}/x_2, ..., \sqrt{\beta_n}/x_n)^T$ oraz $v = (\beta_1/x_1, \beta_2/x_2, ..., \beta_n/x_n)^T$. Niech $s = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m)^T \in \mathbb{R}^n$. Oznaczmy $u(s) = (\operatorname{diag} u)s$, $v(s) = (\operatorname{diag} v)s$ oraz $w = (\sqrt{\beta_1}, \sqrt{\beta_2}, ..., \sqrt{\beta_m})^T$. Zauważmy, że $s^T v = u(s)^T w$ oraz $s^T (\operatorname{diag} u)^2 s = \|u(s)\|^2$. Zatem, po skorzystaniu z nierowności Schwarza, otrzymamy

$$\begin{aligned} s^T \nabla^2 f(x) s &= f(x)(s^T vv^T s - s^T (\operatorname{diag} u)^2 s) \\ &= f(x)((s^T v)^2 - \|u(s)\|^2) \\ &= f(x)((u(s)^T w)^2 - \|u(s)\|^2) \\ &\geq f(x)(\|u(s)\|^2 \cdot \|w\|^2 - \|u(s)\|^2) \\ &= f(x)(\|u(s)\|^2(\|w\|^2 - 1) \\ &= f(x)(\|u(s)\|^2(\sum_{i=1}^n \beta_i - 1) \leq 0 \end{aligned}$$

Hesjan funkcji f jest więc niedodatnio określony, a zatem funkcja f jest wklęsła.

10 (f)

Funkcja Funkcja $f : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (\sum_{k=1}^n x_k^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$, jest wypukła.

$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = (\sum_{k=1}^n x_k^p)^{\frac{1}{p}-1} x_i^{p-1}$, $i = 1, ..., n$.

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} = \begin{cases} (1-p)(\sum_{k=1}^n x_k^p)^{\frac{1}{p}-2} x_j^{p-1} x_i^{p-1} & \text{gdy } j \neq i \\ (1-p)(\sum_{k=1}^n x_k^p)^{\frac{1}{p}-2} (x_i^{2p-2} - (\sum_{k=1}^n x_k^p) x_i^{p-2}) & \text{gdy } j = i \end{cases}$$

Oznaczmy $u = (x_1^{p-1}, ..., x_n^{p-1})^\intercal$, $v = (x_1^{p/2}, ..., x_n^{p/n})^\intercal$, $w = (s_1 x_1^{(p-2)/2}, ..., s_n x_n^{(p-2)/2})^\intercal$ i $s = (s_1, ..., s_n)^\intercal$

Mamy

$$\nabla^2 f(x) = (p-1)(\sum_{k=1}^{n} x_k^p)^{\frac{1}{p}-2} \left[(\sum_{k=1}^{n} x_k^p) \operatorname{diag}(x_1^{p-2}, ..., x_n^{p-2}) - uu^\intercal \right]$$

Zatem, na mocy nierówności Cauchy'ego–Schwarza

$$\begin{aligned}
s^\intercal \nabla^2 f(x) s &= (p-1)(\sum_{k=1}^{n} x_k^p)^{\frac{1}{p}-2} \left[(\sum_{k=1}^{n} x_k^p) s^\intercal \operatorname{diag}(x_1^{p-2}, ..., x_n^{p-2}) s - s^\intercal uu^\intercal s \right] \\
&= (p-1)(\sum_{k=1}^{n} x_k^p)^{\frac{1}{p}-2} \left[(\sum_{k=1}^{n} x_k^p)(\sum_{i=1}^{n} s_i^2 x_i^{p-2}) - (s^\intercal u)^2 \right] \\
&= (p-1)(\sum_{k=1}^{n} x_k^p)^{\frac{1}{p}-2} \left[(\sum_{k=1}^{n} x_k^p)(\sum_{i=1}^{n} s_i^2 x_i^{p-2}) - (\sum_{i=1}^{n} s_i x_i^{p-1})^2 \right] \\
&= (p-1)(\sum_{k=1}^{n} x_k^p)^{\frac{1}{p}-2} \left[(\sum_{k=1}^{n} x_k^p)(\sum_{i=1}^{n} s_i^2 x_i^{p-2}) - (v^\intercal w)^2 \right] \\
&\geq (p-1)(\sum_{k=1}^{n} x_k^p)^{\frac{1}{p}-2} \left[(\sum_{k=1}^{n} x_k^p)(\sum_{i=1}^{n} s_i^2 x_i^{p-2}) - \|v\|^2 \|w\|^2 \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$