Egzamin metod optymalizacji, 3 lipca 2024

Imię i Nazwisko: .... $\sum$ ..../32

W zadaniach 1-4 należy wypełnić polecenia umieszczone w odpowiednich podpunktach oraz ocenić prawdziwość zdań umieszczonych w pozostałych podpunktach. Przy każdym podpunkcie podana jest punktacja. Ocena z części pisemnej jest pozytywna po uzyskaniu łącznie 14 punktów.

1. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C_1, $\bar{x}, s \in \mathbb{R}^n$, $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $q(t) = f(\bar{x} + ts)$.

   (a) $\boxed{2}$ Uzupełnić definicję: *Mówimy, że s jest kierunkiem spadku funkcji f w punkcie $\bar{x}$ w kierunku s jeśli*

   (b) $\boxed{\pm 1}$ $\boxed{\text{tak}\square \text{ nie}\square}$ Jeśli $s^\top \nabla^2 f(\bar{x}) s < 0$, to s jest kierunkiem spadku funkcji f w punkcie $\bar{x}$.

   (c) $\boxed{\pm 1}$ $\boxed{\text{tak}\square \text{ nie}\square}$ Jeśli s jest kierunkiem spadku funkcji f w punkcie $\bar{x}$ w kierunku s to $q'(0) < 0$.

   (d) $\boxed{\pm 1}$ $\boxed{\text{tak}\square \text{ nie}\square}$ Jeśli f jest mocno wypukła, to osiąga ona minimum.

   (e) $\boxed{1}$ Sprawdzić, czy kierunek $s = (1, 1)$ jest kierunkiem spadku funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x_1, x_2) = 4(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$ w punkcie $\bar{x} = (0, 0)$.

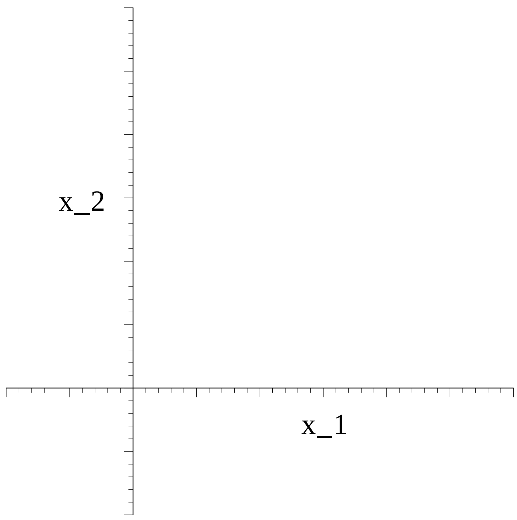
   (f) $\boxed{1}$ Wyznaczyć unormowany kierunek najszybszego spadku funkcji f zdefiniowanej w (e) dla punktu $\bar{x} = (0, 0)$.

2. Dane jest zadanie

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimalizować} & f(x) = 2x_1 + x_2 \\
\text{względem} & x \in \mathbb{R}^2 \\
\text{przy ograniczeniu} & x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 - 8 = 0
\end{array}
\qquad \text{(P)}
$$

(a) $\boxed{2}$ Napisać postać warunków Kuhna–Tuckera dla zadania (P).

(b) $\boxed{2}$ Rozwiązać graficznie zadanie (P), tzn. narysować zbiór rozwiązań dopuszczalnych i zaznaczyć rozwiązanie zadania (P).



(c) $\boxed{2}$ Sprawdzić, czy w każdym punkcie dopuszczalnym spełniony jest warunek regularności Fiacco–McCormicka (LICQ).

(d) $\boxed{\pm 1}$ $\boxed{\text{tak}\square\ \text{nie}\square}$ Zadanie (P) jest zadaniem minimalizacji wypukłej. $\boxed{2}$ Odpowiedź uzasadnić.

(e) $\boxed{3}$ Korzystając z twierdzenia Kuhna–Tuckera wyznaczyć rozwiązanie zadania (P).

3. Niech A będzie macierzą kwadratową symetryczną stopnia n.

(a) $\boxed{1}$ Podać definicję dodatniej określoności macierzy A.

(b) $\boxed{2}$ Podać warunki równoważne dodatniej określoności macierzy A.

(c) $\boxed{\pm 1}$ $\boxed{\text{tak}\square\ \text{nie}\square}$ Jeśli A jest dodatnio określona, to A^{-1} istnieje i jest również dodatnio określona.

(d) $\boxed{\pm 1}$ $\boxed{\text{tak}\square\ \text{nie}\square}$ Jeśli wszystkie macierzy A są dodatnie, to A jest dodatnio określona.

(e) $\boxed{\pm 1}$ $\boxed{\text{tak}\square\ \text{nie}\square}$ Jeśli A jest dodatnio określona, to wszystkie elementy na głównej przekątnej macierzy A są dodatnie.

4. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem $f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ i niech $\bar{x} = (1, 1)$.

(a) $\boxed{2}$ Wyznaczyć gradient i hesjan funkcji f.

(b) $\boxed{\pm 1}$ $\boxed{\text{tak}\square\ \text{nie}\square}$ Punkt $\bar{x}$ jest punktem stacjonarnym funkcji f.

(c) $\boxed{\pm 1}$ $\boxed{\text{tak}\square\ \text{nie}\square}$ Macierz $\nabla^2 f(\bar{x})$ jest dodatnio określona.

(d) $\boxed{\pm 1}$ $\boxed{\text{tak}\square\ \text{nie}\square}$ Macierz $\nabla^2 f(\bar{x})$ jest nieujemnie określona.

(e) $\boxed{\pm 1}$ $\boxed{\text{tak}\square\ \text{nie}\square}$ Funkcja f jest wypukła.

(f) $\boxed{\pm 1}$ $\boxed{\text{tak}\square\ \text{nie}\square}$ Funkcja f osiąga minimum w punkcie $\bar{x}$.