Przykładowe zadania egzaminacyjne z metod optymalizacji

1. Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą typu $m \times n$ i $b \in \mathbb{R}^n$.

   (a) $\boxed{2}$ Pokazać, że macierz $A^T A$ jest nieujemnie określona.

   (b) $\boxed{2}$ Pokazać, że macierz $A^T A$ jest dodatnio określona jeśli A jest pełnego rzędu kolumnowego.

   (c) $\boxed{2}$ Przypuśćmy, że $m = n$ i A jest macierzą symetryczną. Co należy założyć, aby funkcja $f(x) = \frac{1}{2}(x-b)^T A(x-b)$ była wypukła. Odpowiedź uzasadnić.

   (d) $\boxed{2}$ Przypuśćmy, że $m = n$ i $a_{ii} > 0$ dla $i = 1, 2, ..., n$. Czy macierz A jest dodatnio określona? Odpowiedź uzasadnić.

2. Dane są zbiory $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \exp(-x^2 - y^2) \geq \frac{1}{e}\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 1\}$, $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq \sin(\frac{1}{2}\pi x)\}$.

   (a) $\boxed{2}$ Narysować zbiory A, B, C.

   (b) $\boxed{2}$ Które ze zbiorów $A, B, C, A', B', C', A \cap B \cap C, A' \cap B \cap C, A \cap B' \cap C, A \cap B \cap C'$ są wypukłe?

   (c) $\boxed{2}$ Wyznaczyć punkty ekstremalne zbiorów A i B.

   (d) $\boxed{2}$ Przedstawić postaci otoczek wypukłych zbiorów A, B, C.

3. Niech $X \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem wypukłym oraz $f : \mathbb{R}^n \to X$ i $g : X \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ściśle wypukłymi, zaś A będzie macierzą typu $n \times m$.

   (a) $\boxed{2}$ Czy $g \circ f$ jest funkcją wypukłą? Jeśli tak, uzasadnić. Jeśli nie, podać kontrprzykład.

   (b) $\boxed{2}$ Czy funkcja f osiąga minimum? Odpowiedź uzasadnić.

   (c) $\boxed{2}$ Czy funkcja $p : \mathbb{R}^m \to X$ określona wzorem $p(x) = f(Ax)$ jest funkcją wypukłą? Jeśli tak, uzasadnić. Jeśli nie, podać kontrprzykład.

   (d) $\boxed{2}$ Niech $D \subseteq \mathbb{R}^n$ bedzie zbiorem niepustym, domkniętym, wypukłym i ograniczonym. Czy funkcja $q : D \to \mathbb{R}$ określona wzorem $q(x) = \|f(Ax)\|$ osiąga minimum. Odpowiedź uzasadnić.

4. Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ określona jest wzorem $f(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$.

   (a) $\boxed{2}$ Czy f jest wypukła? Odpowiedź uzasadnić.

   (b) $\boxed{2}$ Czy f osiąga minimum? Odpowiedź uzasadnić.

   (c) $\boxed{2}$ Czy f jest koercytywna? Odpowiedź uzasadnić.

   (d) $\boxed{2}$ Zbadać określoność hesjanu funkcji f.

5. Dane są zbiory $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 2\}$ i $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 6\}$. $\boxed{4}$ Wyznaczyć punkt wspólny zbiorów A i B o najmniejszej normie. Uzasadnić poszczególne etapy rozumowania.