Przykładowe zadania na egzamin / kolokwium zaliczeniowe z badań operacyjnych

1. Dany jest zbiór $C := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, gdzie A jest macierzą typu $m \times n$, zaś $b \in \mathbb{R}^m$.

   (a) tak☐ nie☐ Jeśli wszystkie elementy macierzy A są dodatnie, to $C \neq \emptyset$

   (b) tak☐ nie☐ Jeśli zbiór $C \neq \emptyset$, to jest on zbiorem wielościennym

   (c) tak☐ nie☐ Jeśli zbiór $C \neq \emptyset$, to jest on wielościanem

   (d) tak☐ nie☐ Jeśli zbiór $C \neq \emptyset$, to posiada on co najmniej jeden wierzchołek

   (e) tak☐ nie☐ Jeśli zbiór $C \neq \emptyset$ i posiada on co najmniej jeden wierzchołek, to C jest otoczką wypukłą swoich wierzchołków

   (f) tak☐ nie☐ Zbiór C jest wypukły

   (g) Uzasadnić odpowiedź udzieloną w punkcie (f).

2. Dany jest następujący problem:

   Tartak zatrudniający na jedną 8-godzinną zmianę 15 robotników produkuje deski podłogowe i deski boazeryjne mając do dyspozycji w czasie tej zmiany 90 m^3 drewna i 1200 kWh energii elektrycznej. Zużycie jednostkowe energii elektrycznej i wymagana jednostkowa liczba roboczogodzin podane są w poniższej tabeli.

↓ Zużycie na 1 m^3 drewna ⟶	dla desek podłogowych	dla desek boazeryjnych
energia elektr. (w kWh)	8	15
roboczogodziny (w h)	1,5	1

   Zysk z przetarcia 1 m^3 drewna na deski podłogowe wynosi 120 zł, zaś na deski boazeryjne – 100 zł. Zadaniem tartaku jest ustawienie profilu produkcji w taki sposób, aby osiągnąć maksymalny zysk.

   (a) $\boxed{4}$ Przedstawić to zadanie jako zadanie programowania liniowego w postaci klasycznej

   m☐malizować $z =$

   przy ograniczeniach

   gdzie $\begin{cases} x_1 \text{ oznacza} \\ x_2 \text{ oznacza} \end{cases}$

   (1)

   (b) $\boxed{2}$ Podać postać zadania dualnego do zadania (P)

   m☐malizować $z =$

   przy ograniczeniach

   (2)

(c) $\boxed{3}$ Narysować zbiór rozwiązań dopuszczalnych dla zadania (P).

(d) $\boxed{1}$ Rozwiązać graficznie zadanie (P), wskazać na wykresie rozwiązanie optymalne

(e) $\boxed{2}$ Ile m^3 należy przetrzeć na deski podłogowe $\boxed{}$, a ile na deski boazeryjne $\boxed{}$, aby osiągnąć maksymalny zysk?

(f) $\boxed{2}$ Ile wynosi maksymalny zysk z produkcji tartaku na jednej zmianie? $\boxed{}$ zł

(g) $\boxed{1}$ Przedstawić krótką postać początkowej tablicy sympleksowej dla tego zadania

(T1)

(h) $\boxed{\pm 1}$ Której fazie algorytmu sympleksowego odpowiada ta tablica? pierwszej ☐ drugiej ☐

(i) $\boxed{1}$ W tablicy (T1) wskazać element główny zgodnie z odpowiednią fazą algorytmu sympleksowego i dokonać piwotyzacji.

(T2)

(j) $\boxed{\pm 1}$ tak☐ nie☐ Tablica (T2) przedstawia rozwiązanie dopuszczalne zadania (P).

(k) $\boxed{1}$ Podać rozwiązanie bazowe zadania (P) $(x, u) = \boxed{(\quad , \quad , \quad , \quad)}$, które przedstawia tablica (T2).

(l) $\boxed{1}$ Podać rozwiązanie bazowe zadania (D) $(y, v) = \boxed{(\quad , \quad , \quad , \quad)}$, które przedstawia tablica (T2).

(m) $\boxed{\pm 1}$ tak☐ nie☐ Tablica (T2) przedstawia rozwiązanie optymalne.

(n) $\boxed{\pm 1}$ tak☐ nie☐ Tablica (T2) przedstawia rozwiązanie dualnie dopuszczalne.

3. $\boxed{\max 5}$ Dane jest niesprzeczne zadanie programowania liniowego całkowitoliczbowego

$$\begin{array}{rrcl} \text{maksymalizować} & c^\top x & & \\ \text{przy ograniczeniach} & Ax & \leq & b \\ & x & \geq & 0 \\ & x & \in & \mathbf{Z}^n \end{array} \qquad \text{(PC)}$$

gdzie $c, x \in \mathbb{R}^n$, A jest macierzą typu $m \times n$ o dodatnich elementach i $b \in \mathbb{R}^m$, $b, c \geq 0$.

(a) $\boxed{\pm 1}$ tak☐ nie☐ zadanie (PC) zawsze posiada rozwiązanie dopuszczalne

(b) $\boxed{\pm 1}$ tak☐ nie☐ zadanie (PC) zawsze posiada rozwiązanie optymalne

(c) $\boxed{\pm 1}$ tak☐ nie☐ zadanie (PC) można rozwiązać metodą sympleksową

(d) $\boxed{\pm 1}$ tak☐ nie☐ zadanie (PC) można rozwiązać metodą cięć Gomory'ego

(e) $\boxed{\pm 1}$ tak☐ nie☐ jeśli w zadaniu (PC) usunąć założenie o całkowitoliczbowości, to optymalna wartość funkcji celu zmniejszy się.

4. Dany jest graf pełny $G = (V, E)$, którego wierzchołki umieszczone są na płaszczyźnie $\mathbf{R}^2$ i mają współrzędne $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(3, 4)$, $(3, 6)$, $(5, 1)$ i $(6, 3)$. Na zbiorze krawędzi E określona jest funkcja wag $c : E \to \mathbf{R}$ następująco: $c(e)$ jest równa odległości euklidesowej między wierzchołkami związanymi krawędzią e, $e \in E$. Metodą Kruskala wyznaczyć najkrótsze drzewo rozpinające ten graf oznaczając po kolei krawędzie wyznaczane tą metodą.

$\boxed{2}$