Przykładowe zadania egzaminacyjne z badań operacyjnych 2

Na egzaminie będzie 4-5 zadań o charakterze i skali trudności podobnych do poniższych zadań przykładowych.

1. Dane jest zadanie programowania liniowego całkowitoliczbowego

$$\begin{array}{ll} \text{maksymalizować} & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{względem} & x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ \text{przy ograniczeniach} & 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

   (a) Rozwiązać to zadanie graficznie.

   (b) Metodą sympleksową wyznaczyć rozwiązanie optymalne tego zadania z pominięciem całkowitoliczbowości zmiennych.

   (c) Dla wyznaczonego w punkcie (a) rozwiązania przeprowadzić pojedynczą iterację metodą cięc Gomory'ego.

   (d) Czy rozwiązanie otrzymane po tej jednej iteracji jest rozwiązaniem optymalnym wyjściowego zadania? Odpowiedź uzasadnić.

   (e) Rozwiązania wyznaczone w punktach (a) i (b) zaznaczyć na rysunku.

2. Dane jest zadanie maksymalizacji funkcji f na zbiorze skończonym G. Dana jest ponadto pewna rodzina $\mathbf{G}$ podzbiorów zbioru G zawierająca wszystkie zbiory jednoelementowe i funkcja ograniczenia górnego φ określona na $\mathbf{G}$. Które z poniższych zdań są prawdziwe:

   (a) Na wszystkich zbiorach jednoelementowych funkcja φ przyjmuje jednakową wartość.

   (b) $x \in D \in \mathbf{G} \Longrightarrow f(x) < \varphi(D)$.

   (c) Jeśli w trakcie realizacji metody podziału i ograniczeń pewien zbiór $D \in \mathbf{G}$ zostanie rozłożony na dwa rozłączne podzbiory $D_1, D_2 \in \mathbf{G}$ i stwierdzi się, że $\varphi(D_1) \leq \varphi(D_2)$, to zbiór D_1 nie jest dalej rozpatrywany.

   (d) Jeśli w trakcie realizacji metody podziału i ograniczeń stwierdzi się, że $f(x) = \varphi(D)$ dla pewnego $x \in D \in \mathbf{G}$, to x jest kandydatem na rozwiązanie optymalne.

3. Podać przykład funkcji ograniczenia górnego dla całkowitoliczbowego ZPL

$$\begin{array}{ll} \text{maksymalizować} & c^\top x \\ \text{przy ograniczeniach} & Ax \leq b \\ & 0 \leq x \leq h \\ & x \in \mathbf{Z}^n \end{array}$$

4. Dane jest całkowitoliczbowe zadanie programowania liniowego

$$\begin{array}{ll} \text{maksymalizować} & c^\top x \\ \text{przy ograniczeniach} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbf{Z}^n \end{array} \tag{PLC}$$

   i związanie z nim zadanie (PL) powstałe z (PLC) przez usunięcie ograniczeń dotyczących całkowitoliczbowości zmiennych. Które z następujących zdań jest prawdziwe:

(a) Każde rozwiązanie dopuszczalne zadania (PLC) jest rozwiązaniem dopuszczalnym zadania (PL).

(b) Każde rozwiązanie optymalne zadania (PLC) jest rozwiązaniem dopuszczalnym zadania (PL).

(c) Jeśli istnieje rozwiązanie dopuszczalne zadania (PL), to istnieje rozwiązanie dopuszczalne zadania (PLC).

(d) Jeśli istnieje rozwiązanie optymalne zadania (PL), to istnieje rozwiązanie optymalne zadania (PLC).

(e) Jeśli istnieje dokładnie jedno rozwiązanie optymalne zadania (PL), to istnieje dokładnie jedno rozwiązanie optymalne zadania (PLC).

(f) Wartość optymalna funkcji celu dla zadania (PLC) nie przewyższa wartości optymalnej funkcji celu dla zadania (PL).

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić.

5. Zadania transportowe zdefinowane jest przez poniższą tablicę transportową, w której podano zapasy magazynów i zapotrzebowania sklepów oraz jednostkowe koszty transportowe

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	6	7	5	14
A_2	8	4	1	2	10
A_3	7	4	2	3	6
	8	7	6	9	

(a) Metodą kąta północno-zachodniego wyznaczyć bazowe rozwiązanie dopuszczalne.

(b) Dla tego rozwiązania przedstawić układ równań, które muszą spełniać zmienne dualne.

(c) Wyznaczyć zmienne dualne z tego układu.

(d) Wyznaczyć ujemne koszty zredukowane.

(e) Czy rozwiązanie to jest optymalne? Jeśli nie, to przeprowadzić wymianę bazy zgodnie z algorytmem transportowym.

6. Wyjaśnić, dlaczego algorytm transportowy dla zadania transportowego o całkowitoliczbowych zapasach i zapotrzebowaniu daje rozwiązanie optymalne całkowitoliczbowe.

7. Przeprowadzić jedną iterację metoda wegierską dla zadania przydziału o następującej tablicy kosztów

	S_1	S_2	S_3	S_4
P_1	11	7	10	6
P_2	9	12	7	6
P_3	13	14	9	8
P_4	15	8	10	7

8. Dana jest sieć nieskierowana (V, E, c).

(a) Podać definicję najkrótszego drzewa rozpinającego.

(b) Jakie warunki musi spełniac ta sieć, aby takie drzewo istniało?

9. Dany jest graf pełny nieskierowany $G = (V, E)$, którego wierzchołki umieszczone są na płaszczyźnie $\mathbf{R}^2$ i mają współrzędne $(0,0)$, $(0,3)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(0,4)$ i $(5,5)$. Na zbiorze krawędzi E określona jest funkcja wag $c : E \to \mathbf{R}$ następująco: $c(e)$ jest równa odległości euklidesowej między wierzchołkami związanymi krawędzią e, $e \in E$. Metodą Kruskala wyznaczyć najkrótsze drzewo rozpinające ten graf oznaczając po kolei krawędzie wyznaczane tą metodą.

10. W sieci pełnej nieskierowanej (V, E, c) o n wierzchołkach należy wyznaczyć najkrótszy cykl Hamiltona. Które z poniższych zdań sa prawdziwe:

    (a) Zadanie to jest symetrycznym zagadnieniem komiwojażera.

    (b) Zadanie to jest zagadnieniem najkrótszych dróg.

    (c) Zadanie to można rozwiązać za pomocą algorytmu Forda.

    (d) Algorytm 2-optymalny zastosowany do tego zadania zawsze daje rozwiązanie optymalne.

    (e) Zadanie to można najszybciej rozwiązać przeszukując wszystkie cykle Hamiltona.

    (f) Zadanie to ma n^{n-2} rozwiązań dopuszczalnych.

    (g) Zadanie to ma wykładniczą złożoność obliczeniową.

11. Dany jest graf nieskierowany $G = (V, E)$ z wyróżnionym źródłem r i ujściem s, na którym określono macierz przepustowości U o elementach całkowitych nieujemnych.

    (a) Zdefiniować pojęcie dopuszczalnego (r, s)-przepływu w tej sieci.

    (b) Zdefiniować zadanie największego przepływu w tej sieci.

    (c) Co to jest łączny przepływ w sieci?

    (d) Czy zadanie to posiada zawsze rozwiązanie dopuszczalne? Odpowiedź uzasadnić.

    (e) Czy zadanie to posiada zawsze rozwiązanie optymalne? Odpowiedź uzasadnić.

    (f) Czy bez szkody dla ogólności rozważań zadania największego przepływu można założyć, że graf $G = (V, E)$ jest pełny? Odpowiedź uzasadnić.

12. Dany jest graf skierowany (V, E, c), z macierzą wag

$$C = \begin{bmatrix} 15 & 11 & 6 & 7 & 9 \\ 7 & 4 & 8 & 9 & 13 \\ 6 & 9 & 12 & 5 & 7 \\ 5 & 9 & 3 & 14 & 12 \\ 7 & 10 & 6 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

    Dla zagadnienia komiwojażera na tym grafie przeprowadzić jedną iterację metody podziału i ograniczeń z zastosowaniem metody redukcji do wyznaczenia ograniczenia dolnego:

    (a) Wyznaczyć zmodyfikowaną macierz wag.

    (b) Wyznaczyć ograniczenie dolne długości najkrótszego cyklu Hamiltona na tym grafie dla zbioru $D_{\emptyset,\emptyset}$.

    (c) Według którego łuku powinien nastąpić podział?

13. Dla zagadnienia największego przepływu w grafie nieskierowanym $G = (V, E)$ ze źródłem r w 1. węźle i ujściem s w 4. węźle podana jest macierz przepustowości

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Narysować ten graf z zaznaczeniem przepustowości.

(b) Podać przykład dopuszczalnego (r, s)-przesyłu.

(c) Przedstawić sieć residualną i ścieżkę powiększającą.