UNIWERSYTET ZIELONOGÓRSKI

WYDZIAŁ MATEMATYKI, INFORMATYKI I EKONOMETRII

kierunek Inżynieria danych

specjalność Modelowanie i analiza danych

Karol Niewiadomski

Liniowe i nieliniowe filtry Kalmana

Linear and nonlinear Kalman filters

Promotor pracy dr Jacek Bojarski
inżynierskiej

Zielona Góra, 2018

Spis treści

1 Wstęp

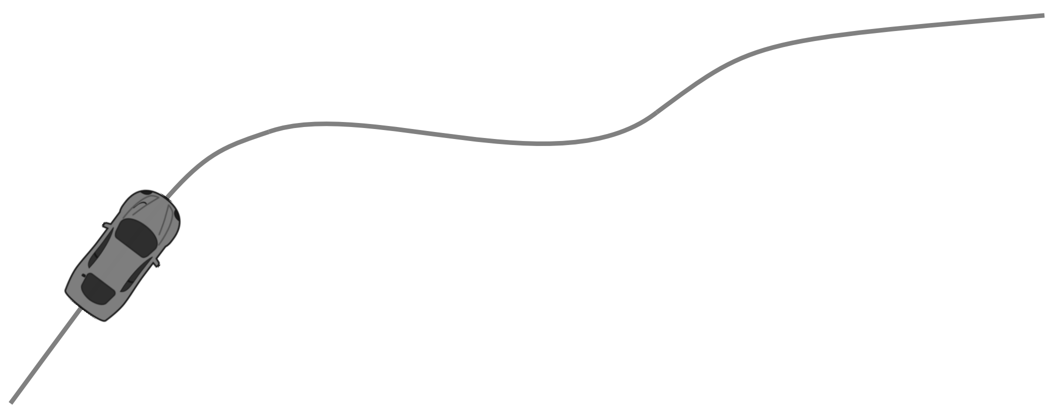
Celem niniejszej pracy jest poruszenie problemu estymacji zaszumionych pomiarów oraz przedstawienie jednego z rozwiązań tego problemu, podanego w 1960 roku przez Rudolfa Emila Kalmana [1]. Mowa o iteracyjnym algorytmie, znanym szerzej jako filtr Kalmana (Kalmana-Bucy'ego). Pierwsze historycznie znane zastosowanie filtru Kalmana miało miejsce na początku 1960 roku w Centrum Badawczym imienia Josepha Amesa w NASA podczas oceny wykonywalności projektu Apollo [2]. Naukowcy z Centrum Badawczego stanęli przed problemem opracowania sposobu nawigacji i kontrolowania statku kosmicznego, który miał, startując z Ziemi, ruchem okrężnym dotrzeć do Księżyca i powrócić na Ziemię, zachowując przy tym wszystkie ograniczenia związane z lądowaniem. Początkowo badacze zastanawiali się nad zastosowaniem filtra Wienera, którego używali podczas naprowadzania pocisków odrzutowych, jednak zrezygnowali z niego. Powodem była nieliniowość problemu oraz wymóg, aby metoda nawigacji przystosowana była do przetwarzania dyskretnych i niereguralnych pomiarów, podczas gdy przy naprowadzaniu pocisków odrzutowych zakładano ciągłość obserwacji. Filtr Kalmana pojawił się w tym miejscu niespodziewanie, nie był, inaczej niż to często bywa, wynikiem przeszukiwania dostępnych publikacji. Jeden z członków grupy badawczej trzymającej pieczę nad opisywanym projektem, Stanley F. Schmidt utrzymywał kontakty z Rudolfem Kalmanem, naukowcem działającym ówcześnie przy Research Institute for Advanced Studies (RIAS) w Baltimore. Kalman, nieświadomy problemu przed jakim stali naukowcy z NASA, zaaranżował spotkanie z drem Schmidtem, którego celem miała być dyskusja na tematy podejmowane przez obu panów. W trakcie tego spotkania przedstawił on swoją najnowszą publikację dotyczącą optymalnej filtracji. Przedstawiony w niej filtr zaciekawił Schmidta na tyle, że konsultacji ze współpracownikami postanowił on użyć filtru Kalmana do rozwiązania postawionego mu problemu. Filtr Kalmana w ówczesnej postaci nie odpowiadał na problem nieliniowości, jednak stał się podstawą do opracowania tak zwanego Rozszerzonego Filtru Kalmana (EKF - *Extended Kalman Filter*), który został ostatecznie użyty przy misji Apollo. Od tego czasu filtr Kalmana stał się jednym z podstawowych narzędzi używanych w inżynierii, a w szczególności w systemach nawigacyjnych oraz ogólnie w przetwarzaniu sygnałów.

Ostatecznym celem tej pracy jest zastosowanie filtru Kalmana do odszumienia sygnału pochodzącego z nadajnika GPS. System GPS nieodzownie kojarzy nam się ze śledzeniem obiektu, a więc także z ruchem. W tej pracy skupimy się zatem na modelach poruszania się obiektów. W pierwszej części zapoznamy się z liniowym filtrem Kalmana, wychodząc od przykładów dotyczących ruchu. Ważną częścią pracy jest stworzenie aplikacji edukacyjnej, mającej na celu zapoznanie z funkcjonalnością filtru Kalmana. Przeprowadzimy symulację, w której zastosujemy filtr Kalmana do odszumienia sygnału z nadajnika GPS umieszczonego w poruszającym się samochodzie.

Elementarne pojęcia matematyczne z zakresu algebry, analizy matematycznej, rachunku prawdopodobieństwa oraz statystyki oparte zostały na notatkach ze studiów oraz [3] i w dużej mierze na pracy [4]. Pojęcia fizyczne i modele ruchu oparte zostały na pracach [5] i [6].

2 Przykład wprowadzający

Obiekt porusza się po pewnej trajektorii, której nie znamy.

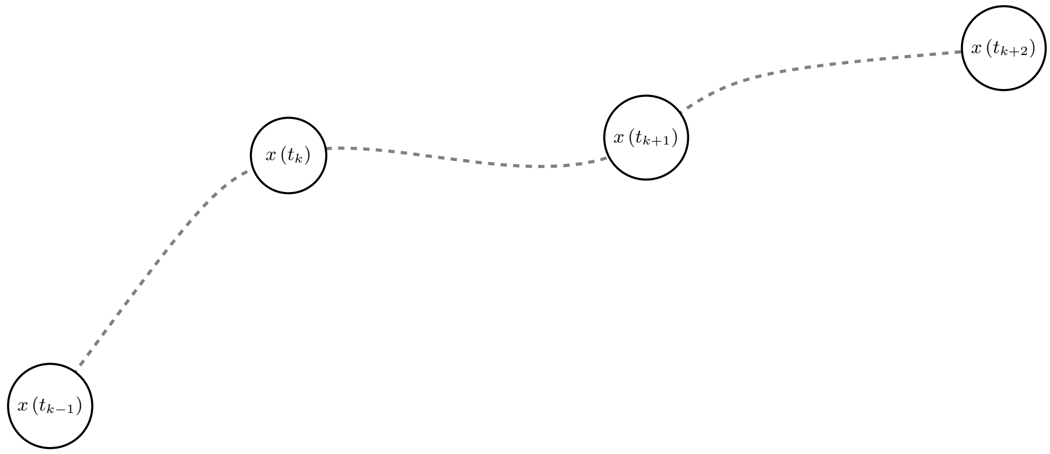


Rysunek 1: Poruszający się obiekt. Clipart samochodu pobrany ze strony `https://openclipart.org` [dostęp: 10.02.2018].

Naszym głównym celem jest jak najwierniejsze odtworzenie tej trajektorii, przy wykorzystaniu instrumentów pomiarowych. Niech t_0 oznacza czas, w którym obiekt rozpoczął ruch oraz niech $x(t)$ oznacza położenie obiektu w czasie $t \geqslant t_0$. Odtworzenie trajektorii polegać będzie zatem na znalezieniu pozycji $x(t)$, w której znajduje się obiekt w dowolnym czasie t. Załóżmy, że dane jest urządzenie pomiarowe, dzięki któremu w dyskretnych momentach t_k, dla $k = 0, ..., n$ otrzymujemy informację o położeniu obiektu $z(t_k)$. Gdyby wskazania urządzenia pomiarowego były bezbłędne, to znaczy, gdyby

$$z(t_k) = x(t_k),$$

to znalibyśmy dokładną pozycję obiektu w momencie t_k, tak jak na Rysunku 2.

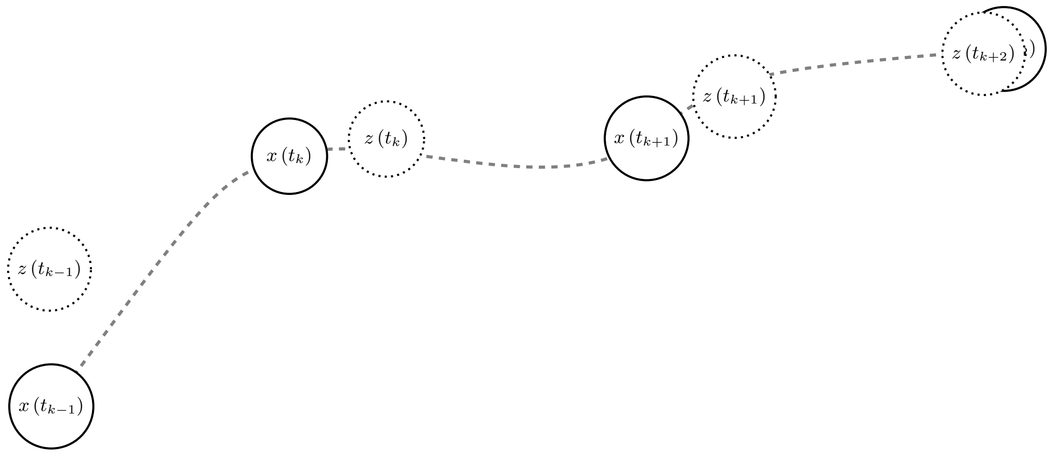


Rysunek 2: Położenie obiektu w dyskretnych chwilach czasu.

W rzeczywistym świecie rzadko spotykamy bezbłędne instrumenty pomiarowe, a zatem załóżmy, że urządzenie obarczone jest błędem pomiarowym $\delta(t_k)$, to znaczy

$$z(t_k) = x(t_k) + \delta(t_k).$$

Znajdujemy się więc w sytuacji, w której pomiar nie musi zgadzać się z rzeczywistą pozycją obiektu, co przedstawia Rysunek 3.



Rysunek 3: Położenie obiektu oraz jego pomiar w dyskretnych chwilach czasu.

Obserwujemy parę $(t_k,\ z(t_k))$. Załóżmy dalej, że odstęp czasowy pomiędzy uzyskaniem $k-1$-szej a k-tej obserwacji jest stały, to znaczy

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1} \equiv const$$

i przyjmując $\Delta t = \Delta t_k$ zdefiniujmy dyskretne położenie x_k jako

$$x_k = x(t_k) = x(t_0 + k\Delta t).$$

Analogicznie zdefiniujmy pomiar z_k jako

$$z_k = z(t_k)$$

oraz błąd pomiarowy δ_k poprzez

$$\delta_k = \delta(t_k).$$

Stosując powyższe oznaczenia możemy zapisać zależność

$$z_k = x_k + \delta_k. \tag{1}$$

Powyższe równanie określać będziemy mianem **równania pomiarowego**.

2.1 Pierwsza estymata położenia

Załóżmy, że $\{\delta_k\}$ jest ciągiem wektorów losowych o następujących własnościach:

- wartość oczekiwana $\mathbf{E}(\delta_k) = 0$ dla dowolnego k,
- wektory δ_i oraz δ_j dla $i \neq j$ są nieskorelowane, tzn. macierz kowariancji $\mathbf{Cov}(\delta_j, \delta_i) = 0$,
- wektor δ_k dla dowolnego k ma wielowymiarowy rozkład normalny o znanej macierzy kowariancji $\mathbf{Var}(\delta_k) = \mathbf{E}(\delta_k \delta_k^T) = R_k$.

Ciąg wektorów losowych o powyższych własnościach nazywamy gaussowskim białym szumem.

Przypomnijmy, że naszym celem jest wyznaczenie położenia x_k obiektu w kroku k. Założyliśmy, że pomiędzy położeniem obiektu, a jego pomiarem istnieje zależność opisana wzorem (1). Możemy jednak wyobrazić sobie sytuację, w której pomiar nie dotyczy bezpośrednio położenia x_k, ale na przykład kierunku i prędkości obiektu, które możemy wyrazić w terminach położenia przy pomocy odpowiednich wzorów. Załóżmy początkowo, że związek pomiędzy położeniem obiektu a jego pomiarem jest liniowy i zapiszmy równanie (1) w bardziej ogólnej postaci

$$z_k = C_k x_k + \delta_k. \tag{2}$$

Niech $\hat{x}_k$ oznacza estymatę położenia x_k wyznaczoną na podstawie pomiaru z_k. Aby wyznaczyć estymatę położenia $\hat{x}_k$, przyglądamy się wektorowi $z_k - C_k \hat{x}_k$ i poszukujemy takiego $\hat{x}_k$, dla którego różnica pomiędzy pomiarem z_k a wektorem $C_k \hat{x}_k$ będzie najmniejsza. Zauważmy, że $z_k - C_k x_k = \delta_k$. Jeśli urządzenie nie jest obarczone błędem, to znaczy jeśli $\delta_k = 0$, to estymator położenia wyznaczony jest ze wzoru

$$\hat{x}_k = C_k^{-1} z_k,$$

o ile tylko macierz C_k jest odwracalna lub bardziej ogólnie ze wzoru

$$\hat{x}_k = (C_k^T C_k)^{-1} C_k^T z_k,$$

gdy macierz C_k jest pełnego rzędu.

W ogólnym przypadku mamy do czynienia z wektorem losowym $z_k - C_k \hat{x}_k$ i chcemy, aby $\hat{x}_k$ był nieobciążonym estymatorem o minimalnej wariancji. Znając wariancję błędu urządzenia pomiarowego, możemy wyznaczyć $\hat{x}_k$ minimalizując funkcję

$$F(\hat{x}_k) = \mathbf{E}(z_k - C_k \hat{x}_k)^T R_k^{-1} (z_k - C_k \hat{x}_k). \tag{3}$$

Można wykazać [7] [8], że nieobciążony estymator $\hat{x}_k$ o minimalnej wariancji, wyznaczony poprzez minimalizację powyższej funkcji dany jest wzorem

$$\hat{x}_k = (C_k^T R_k^{-1} C_k)^{-1} C_k^T R_k^{-1} z_k. \tag{4}$$

Zauważmy, że w wypadku, gdy $C_k = I$ wektor $\hat{x}_k$ sprowadza się do zaobserwowanego pomiaru z_k albowiem

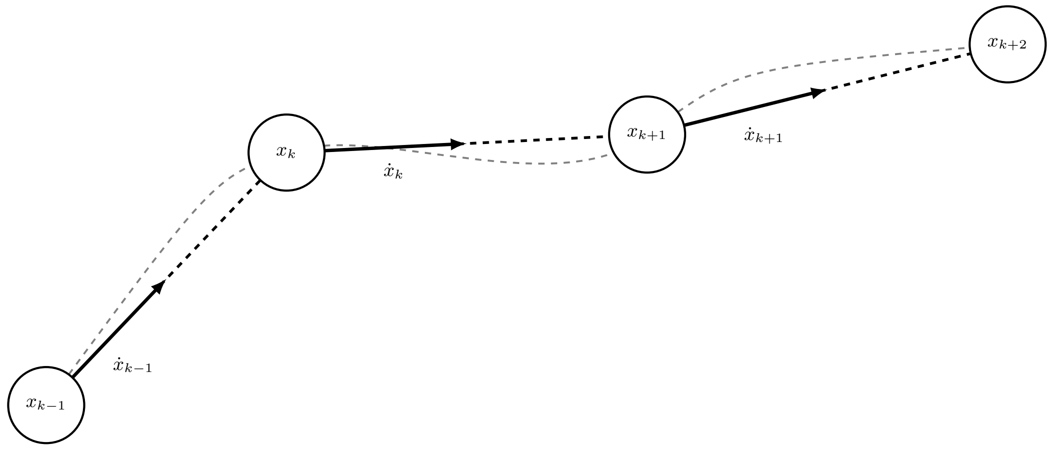
$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= (C_k^T R_k^{-1} C_k)^{-1} C_k^T R_k^{-1} z_k \\ &= (R_k^{-1})^{-1} R_k^{-1} z_k \\ &= z_k. \end{aligned}$$

W istocie wiemy jednak, że pomiar z_k nie musi odpowiadać rzeczywistej pozycji obiektu x_k. W kolejnych przykładach wzbogacimy model o dodatkowe założenia, które pozwolą na wyznaczenie optymalnej estymaty na podstawie ciągu pomiarów $\{z_k\}$.

2.2 Pierwszy model ruchu

Do tej pory rozważaliśmy ruch obiektu, patrząc na niego przez pryzmat obserwacji, które jesteśmy w stanie uzyskać za pomocą przyrządu pomiarowego. Spojrzyjmy teraz z nieco innej perspektywy, rozważając różne modele poruszania się obiektu.

Przyjmijmy, że ruch z punktu x_k do x_{k+1} odbywa się po linii prostej zgodnie z pewnym wektorem prędkości $\dot{x}_k$, tak jak zostało to przedstawione na Rysunku 4.



Rysunek 4: Prostoliniowy ruch pomiędzy kolejnymi krokami.

Związek pomiędzy położeniem obiektu x_{k+1} i jego położeniem x_k możemy opisać poprzez rekurencyjną relację

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t \dot{x}_k. \tag{5}$$

Zauważmy, że korzystając z powyższego równania jesteśmy w stanie wyznaczyć położenie x_{k+1}, o ile tylko wyznaczyliśmy poprzednie położenie x_k oraz o ile dany jest nam wektor prędkości $\dot{x}_k$. W przeciwnym wypadku musimy go oszacować.

2.3 Drugi model ruchu

Przyjmijmy, że dysponujemy wektorem położenia x_k oraz wektorem prędkości $\dot{x}_k$. Zgodnie z poprzednimi założeniami ruch z punktu x_k do punktu x_{k+1} odbywa się po linii prostej zgodnie z wektorem $\dot{x}_k$, a zatem równanie (5) pozostaje bez zmian. Tym razem chcemy jednak rekurencyjnie wyznaczyć wektor prędkości $\dot{x}_{k+1}$. W najprostszym modelu możemy przyjąć, że obiekt ma stałą prędkość, to znaczy

$$\dot{x}_{k+1} = \dot{x}_k.$$

Taki model nie opisuje dobrze zachowania obiektu, ponieważ w rzeczywistym świecie obiekt może skręcać, nieznacznie zwalniać, czy przyspieszać. Żeby ująć tę zmienność w modelu do powyższego równania dodajemy element losowy $\dot{\varepsilon}_k$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \Delta t \dot{x}_k, \\ \dot{x}_{k+1} &= \dot{x}_k + \dot{\varepsilon}_k. \end{aligned} \tag{6}$$

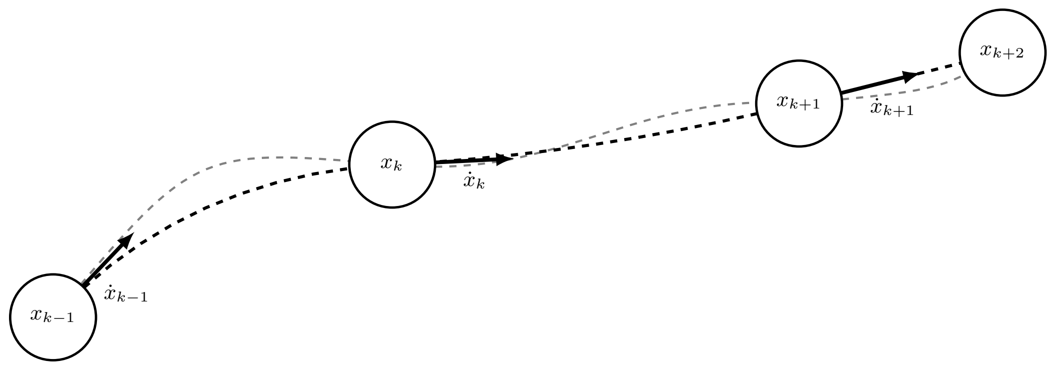
Zakładamy, że wektor losowy $\dot{\varepsilon}_k$ ma wielowymiarowy rozkład normalny o zerowej wartości oczekiwanej oraz znanej macierzy kowariancji $\dot{Q}_k$. Zauważmy, że $\mathbf{E}(\dot{x}_{k+1}) = \dot{x}_k$, a zatem w naszym założeniu mamy informację, że średnio prędkość w kroku $k+1$ nie zmienia się w stosunku do prędkości w poprzednim kroku. Ponadto zauważmy, że poprzez macierz kowariancji $\dot{Q}_k$ możemy sterować zmiennością prędkości w modelu.

2.4 Trzeci model ruchu

Zauważyliśmy, że ruch obiektu może być zmienny. Żeby lepiej opisać dynamikę zmian załóżmy, że analogicznie do pierwszego przykładu, w którym w każdym kroku k dana była prędkość $\dot{x}_k$, w każdym kroku dany jest wektor przyspieszenia $\ddot{x}_k$. W tym podejściu będziemy rekurencyjnie wyznaczać zarówno położenie, jak i prędkość. Równania ruchu przedstawiają się następująco

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \Delta t \dot{x}_k + \frac{1}{2}\Delta^2 t \ddot{x}_k, \\ \dot{x}_{k+1} &= \dot{x}_k + \Delta t \ddot{x}_k. \end{aligned} \tag{7}$$

Zauważmy, że w tym modelu ruch pomiędzy kolejnymi punktami nie musi być prostoliniowy. Sytuację przedstawia Rysunek 5.



Rysunek 5: Ruch obiektu przy założeniu znanego przyspieszenia pomiędzy kolejnymi punktami.

W ogólności można powiedzieć, że model jest niedoskonałym opisem zjawiska. Żeby uwzględnić tę niedoskonałość, dodajmy do równań (7) losowy błąd. Mamy wtedy

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \Delta t \dot{x}_k + \frac{1}{2}\Delta^2 t \ddot{x}_k + \varepsilon_k, \\ \dot{x}_{k+1} &= \dot{x}_k + \Delta t \ddot{x}_k + \dot{\varepsilon}_k. \end{aligned} \tag{8}$$

O błędach ε_k i $\dot{\varepsilon}_k$ zakładamy, iż mają rozkład normalny ze średnią równą 0 oraz znanymi macierzami kowariancji, odpowiednio Q_k oraz $\dot{Q}_k$.

3 Liniowy układ dynamiczny

Równania w opisanych modelach możemy zapisać w postaci macierzowej

$$X_{k+1} = A_k X_k + B_k u_k + \epsilon_k. \tag{9}$$

Powyższe równanie nazywamy **równaniem procesowym** i zawiera ono następujące składniki:

- wektor X_k zwany wektorem stanu - opisuje on stan obiektu w kroku k,
- macierz A_k zwana macierzą przejścia - określa, w jaki sposób stan w kroku k wpływa na stan w następnym kroku $k+1$,
- wektor u_k zwany wektorem wejścia lub wektorem kontrolnym - w nim zawarte są informacje z zewnątrz, niezwiązane rekurencyjną relacją lecz dane niezależnie w każdym kroku k,
- macierz B_k zwana macierzą wejścia - opisuje ona sposób, w jaki wektor wejścia u_k wpływa na stan obiektu w kroku $k+1$,
- wektor ϵ_k zwany szumem procesowym - wyraża niepewność co do poprawności deterministycznie wyznaczonego stanu w kroku $k+1$ i zakładamy, że ma rozkład normalny o średniej 0 i znanej macierzy kowariancji Q_k.

Identyfikując składniki równania pomiarowego w każdym z przedstawionych modeli otrzymujemy poniższe zestawienie.

Model pierwszy

Wykonując poniższe podstawienia otrzymujemy model pierwszy (5)

$$X_k = x_k, \quad A_k = I, \quad u_k = \dot{x}_k, \quad B_k = \Delta t, \quad \text{oraz} \quad \epsilon_k = 0, \tag{10}$$

gdzie przez I oznaczamy macierz jednostkową. W bardziej ogólnym przypadku możemy założyć, iż model pierwszy również podlega pewnemu błędowi ε_k mającemu rozkład normalny ze średnią równą 0 oraz znaną macierzą kowariancji Q_k. Otrzymujemy wtedy

$$\epsilon_k = \varepsilon_k.$$

Model drugi

Model drugi (6) uzyskujemy w wyniku podstawień

$$\begin{aligned} X_k &= \begin{bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \end{bmatrix}, \qquad A_k = \begin{bmatrix} I & I\Delta t \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad u_k = 0, \\ B_k &= 0 \qquad \text{oraz} \qquad \epsilon_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\varepsilon}_k \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{11}$$

Model trzeci

Stosując poniższe podstawienia otrzymujemy model trzeci (8)

$$\begin{aligned} X_k &= \begin{bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \end{bmatrix}, \qquad A_k = \begin{bmatrix} I & I\Delta t \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad u_k = \ddot{x}_k, \\ B_k &= \begin{bmatrix} I\frac{1}{2}\Delta^2 t \\ I\Delta t \end{bmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad \epsilon_k = \begin{bmatrix} \varepsilon_k \\ \dot{\varepsilon}_k \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{12}$$

Podobne uogolnienie możemy zastosować do równania pomiarowego (2). W sekcji 2.1 założyliśmy, że obserwujemy jedynie położenie obiektu x_k i przedstawione równanie pomiarowe odnosiło się jedynie do wektora x_k. Ogólniej, jeśli X_k jest wektorem stanu i Z_k wektorem zawierającym pomiar procesu, równanie pomiarowe możemy zapisać jako

$$Z_k = C_k X_k + \delta_k, \tag{13}$$

gdzie C_k jest macierzą wyjścia, opisującą związek pomiędzy stanem obiektu a pomiarem stanu oraz δ_k jest, jak poprzednio, losowym wektorem o wielowymiarowym rozkładzie normalnym ze średnią 0 oraz znaną macierzą kowariancji R_k. Wektor δ_k nazywamy szumem pomiarowym. Zauważmy, że jeśli urządzenie pomiarowe zbiera jedynie informacje o położeniu obiektu i przyjmiemy model, w którym prędkość należy do wektora stanu, to macierz C_k nie będzie macierzową kwadratową, lecz przyjmie postać

$$C_k = [I \quad 0],$$

gdzie 0 oznacza macierz zerową.

Zestawiając równanie procesowe (9) oraz równanie pomiarowe (13) otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} X_{k+1} &= A_k X_k + B_k u_k + \epsilon_k \\ Z_k &= C_k X_k + \delta_k \end{cases}, \tag{14}$$

który nazywamy liniowym stochastycznym dyskretnym układem dynamicznym. Takie przedstawienie pozwala nam na wprowadzenie głównego przedmiotu tej pracy, czyli filtru Kalmana.

4 Liniowy filtr Kalmana

Niech dany będzie dyskretny liniowy system dynamiczny postaci (14). Niech $\hat{X}_{k|k}$ oznacza estymatę wektora stanu w kroku k wyznaczoną na podstawie ciągu pomiarów $\{Z_k\}$. Zakładamy, że spełnione są następujące założenia:

- ciągi $\{\epsilon_k\}$ i $\{\delta_k\}$ są nieskorelowanymi ciągami białego szumu o rozkładach normalnych ze średnimi $\mathbf{E}(\epsilon_k) = \mathbf{E}(\delta_k) = 0$ oraz znanymi macierzami kowariancji $\mathbf{Var}(\epsilon_k) = Q_k$ oraz $\mathbf{Var}(\delta_k) = R_k$, dla każdego $k = 0, \dots, n$,
- dany jest wektor $\mathbf{E}(X_0)$ oraz macierz kowariancji $\mathbf{Var}(X_0)$,
- dla dowolnego $k = 0, \dots, n$ mamy $\mathbf{E}(X_0 \epsilon_k^T) = \mathbf{E}(X_0 \delta_k^T) = 0$.

Filtr Kalmana jest algorytmem umożliwiającym wyznaczenie optymalnej estymaty $\hat{X}_{k|k}$ wektora stanu X_k na podstawie ciągu pomiarów $\{Z_k\}$. Jest on powszechnie stosowany w systemach informatycznych i urządzeniach pomiarowych, które w czasie rzeczywistym muszą wyznaczać stan obiektu. Z powodu ograniczoności pamięci operacyjnej w urządzeniach korzystających z filtru Kalmana, wyprowadzona została rekurencyjna procedura, dzięki której możliwe jest wyznaczenie estymaty $\hat{X}_{k|k}$ bez konieczności przechowywania w pamięci całego ciągu pomiarów $\{Z_k\}$. Procedura ta dzieli się na dwie fazy: fazę predykcji oraz fazę korekcji. Przedstawimy teraz wzory stosowane w każdej z nich.

4.1 Faza predykcji

W tej fazie przyglądamy się stanowi obiektu przed pojawieniem się pomiaru Z_k. Zakładamy, że $\hat{X}_{0|0} = \mathbf{E}(X_0)$. Niech $\hat{X}_{k|k-1}$ oznacza estymatę wektora stanu nie uwzględniającą pomiaru Z_k. Niech dalej $P_{k|k}$ oznacza kowariancję wektora $X_k - \hat{X}_{k|k}$ oraz $P_{k|k-1}$ kowariancję wektora $X_k - \hat{X}_{k|k-1}$. Przyjmujemy, że

$$P_{0|0} = \mathbf{Var}(X_0).$$

W fazie predykcji wyznaczamy estymatę $\hat{X}_{k|k-1}$ oraz macierz kowariancji $P_{k|k-1}$. Mamy

$$\hat{X}_{k|k-1} = A_{k-1}\hat{X}_{k-1|k-1} + B_{k-1}u_{k-1} \tag{15}$$

oraz

$$P_{k|k-1} = A_{k-1}P_{k-1|k-1}A_{k-1}^T + Q_{k-1}. \tag{16}$$

4.2 Faza korekcji

W tej fazie przyglądamy się stanowi obiektu po pojawieniu się pomiaru Z_k. Najważniejszym elementem fazy korekcji jest wyznaczenie macierzy G_k zwanej wzmocnieniem Kalmana. Wyraża się ona wzorem

$$G_k = P_{k|k-1}C_k^T(C_kP_{k|k-1}C_k^T + R_k)^{-1} \tag{17}$$

i stanowi element filtrujący, dzięki któremu możliwe jest poprawienie estymaty wektora stanu

$$\hat{X}_{k|k} = \hat{X}_{k|k-1} + G_k(Z_k - C_k\hat{X}_{k|k-1}) \tag{18}$$

oraz macierzy kowariancji

$$P_{k|k} = (I - G_kC_k)P_{k|k-1}. \tag{19}$$

Estymaty $\hat{X}_{k|k}$ oraz $\hat{X}_{k|k-1}$ wektora stanu nazywamy odpowiednio estymatami *a priori* oraz *a posteriori*. Analogicznie macierze kowariancji

$$P_{k|k-1} = \mathbf{E}(X_k - \hat{X}_{k|k-1})(X_k - \hat{X}_{k|k-1})^T = \mathbf{Var}(X_k - \hat{X}_{k|k-1})$$

oraz

$$P_{k|k} = \mathbf{E}(X_k - \hat{X}_{k|k})(X_k - \hat{X}_{k|k})^T = \mathbf{Var}(X_k - \hat{X}_{k|k})$$

nazywamy odpowiednio macierzami kowariancji *a priori* i *a posteriori*, odwołując się do sposobu ich uzyskania *przed* oraz *po* pojawieniu się pomiaru.

4.3 Liniowy filtr Kalmana z perspektywy użytkownika

Opisana procedura postępuje rekurencyjnie, aż do wyczerpania pomiarów Z_k. Korzystając z filtru Kalmana musimy zatem podać

- początkowy punkt X_0,
- początkową macierz kowariancji $P_{0|0}$,

dodatkowo, w każdym kroku $k \geqslant 0$

- macierze A_k, B_k i C_k,
- wektor wejścia u_k,
- wektor pomiarów Z_k.

Na wyjściu, w każdym kroku k otrzymujemy estymatę $\hat{X}_{k|k}$ wektora stanu X_k. W przypadku obserwowania poruszającego się obiektu, może to oznaczać wygładzenie trajektorii ruchu, uzyskanej z pomiarów.

5 Zastosowanie liniowego filtru Kalmana

Pokażemy teraz przykładowe zastosowanie filtru Kalmana oraz opisanych powyżej modeli ruchu w wyznaczaniu trajektorii obiektu.

5.1 Aplikacja

Elementem niniejszej pracy jest aplikacja ukazująca działanie filtru Kalmana przy użyciu przedstawionych modeli ruchu. Działająca wersja aplikacji dostępna jest online pod adresem `https://karylsienn.shinyapps.io/liniowyfiltrkalmana/`. Ponadto, kod źródłowy znajduje się na płycie dołączonej do niniejszej pracy.

Celem aplikacji jest przede wszystkim ukazanie, w jaki sposób zmiana wartości macierzy kowariancji szumu procesowego Q_k oraz szumu pomiarowego R_k wpływa na przeprowadzenie filtracji Kalmana. Korzystanie z aplikacji zostało opisane w Dodatku A. Warto wspomnieć, że w przypadku pomiarów, w aplikacji wprowadzone zostało rozróżnienie na macierz kowariancji R_k, która służy do generowania szumu pomiarowego oraz macierz kowariancji $R_k^{'}$, którą przyjmujemy w modelu. Takie rozróżnienie ma na celu zbadanie filtru Kalmana pod kątem zgodności modelu z rzeczywistym zachowaniem układu dynamicznego.

Poniżej rozważamy dwa przypadki, w których odpowiednio dobieramy macierze Q_k oraz $R_k^{'}$. Zakładamy, że macierze te są stałe i oznaczamy $Q = Q_k$ oraz $R^{'} = R_k^{'}$. Przyjmujemy stałą macierz $R_k = R$ postaci

$$R = \begin{bmatrix} 1000 & 500 \\ 500 & 1000 \end{bmatrix}.$$

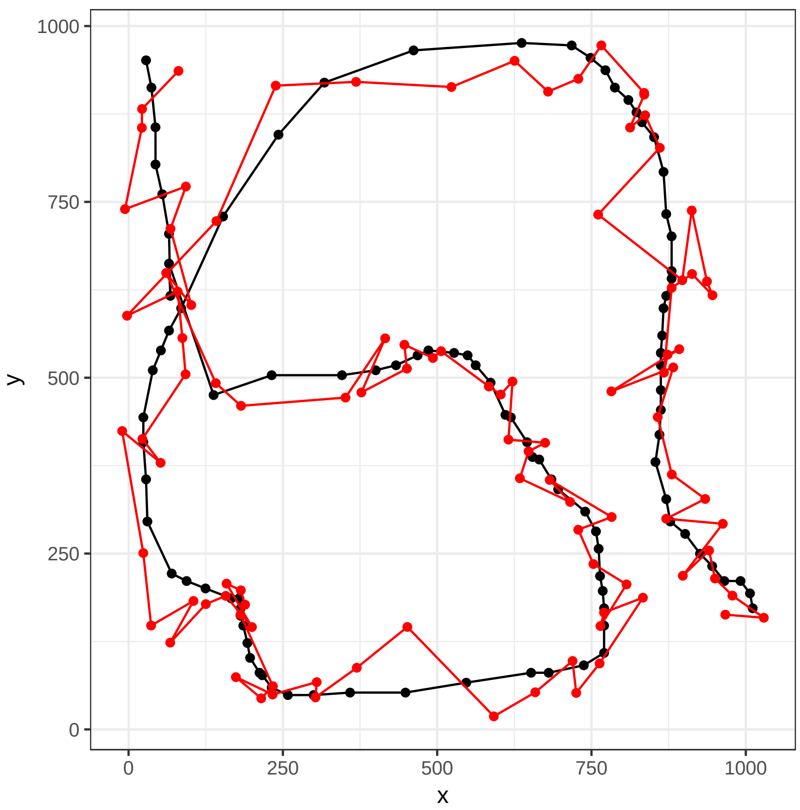
Rozważmy trajektorię oraz pomiary przedstawione na Rysunku 6.

5.1.1 Pierwszy przypadek

Przyjmijmy dowolną niezerową macierz Q oraz przyjmijmy, że $R^{'} = 0$. Wtedy macierz składowa wzmocnienia Kalmana G_k odnosząca się do położenia, będzie macierzą jednostkową. Rozważmy wzór (18) i zauważmy, że w dowolnym modelu będziemy mieli następującą relację

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + I(Z_k - \hat{x}_{k|k-1}) = Z_k,$$

gdzie $\hat{x}_{k|k-1}$ oraz $\hat{x}_{k|k}$ są składowymi wektorów, odpowiednio $\hat{X}_{k|k-1}$ oraz $\hat{X}_{k|k}$, odnoszącymi się do położenia obiektu. Oznacza to, że niezależnie od modelu filtr Kalmana przyjmie pomiar Z_k za estymatę położenia. Sytuację ukazującą działanie filtra w tym przypadku przedstawia Rysunek 7.



Rysunek 6: Trajektoria ruchu wraz z zaszumionymi pomiarami. Linia i punkty koloru czarnego oznaczają rzeczywistą trajektorię, koloru czerwonego - pomiary.

5.1.2 Drugi przypadek

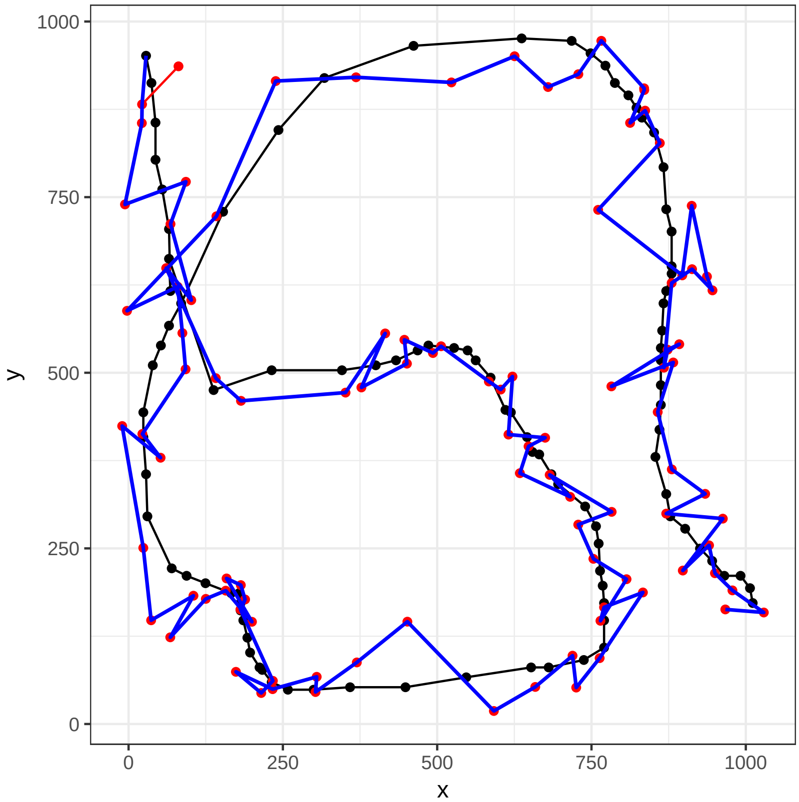
Tym razem przyjmujemy dowolną macierz $R^{'}$ oraz $Q = 0$. Przyjmujemy także, że początkowa macierz $P_{0|0} = 0$. W takim wypadku wzmocnienie Kalmana $G_k = 0$ dla dowolnego k. Wszystko zależy zatem od przyjętego modelu, albowiem mamy

$$\begin{aligned}\hat{X}_{k|k} &= \hat{X}_{k|k-1} + G_k(Z_k - \hat{X}_{k|k-1}) \\ &= \hat{X}_{k|k-1}.\end{aligned}$$

Oznacza to, że pomiary nie grają żadnej roli w wyznaczaniu estymaty wektora stanu $\hat{X}_{k|k}$. Przykładową realizację pokazano na Rysunku 8 na podstawie symulacji, w której przyjęto model drugi (6). Od razu widzimy, że w tym przykładzie, macierze $R^{'}$ oraz Q przyjęte są błędnie, albowiem wyznaczona prędkość $\dot{x}_k = \dot{x}_0$ dla dowolnego k nie stanowi odzwierciedlenia rzeczywistej, zmiennej prędkości obiektu.

5.1.3 Wnioski

Widzimy, że wyznaczenie macierzy kowariancji szumu procesowego oraz pomiarowego ma istotny wpływ na zachowanie filtru. W praktycznych zastosowaniach macierze Q_k i R_k wyznaczane są eksperymentalnie, co nierzadko jest trudnym zadaniem. O ile bowiem znając parametry urządzenia pomiarowego jesteśmy w stanie oszacować macierz kowariancji błędu pomiarowego, o tyle w przypadku błędu procesu, musimy zdać się na naszą wiedzę i doświadczenie zdobyte podczas badania opisywanych zjawisk.



Rysunek 7: Działanie filtru Kalmana w pierwszym przypadku. Linia i punkty koloru czarnego oznaczają prawdziwą trajektorię, czerwonego - pomiary, linia koloru niebieskiego - wyestymowane wartości.

W literaturze [9] [10] znaleźć można metody wyznaczania macierzy R_k oraz Q_k. Zauważmy także, że eksperymentując z macierzami Q_k i R_k możemy przekonać się, czy w modelu zastosowaliśmy odpowiednie parametry.

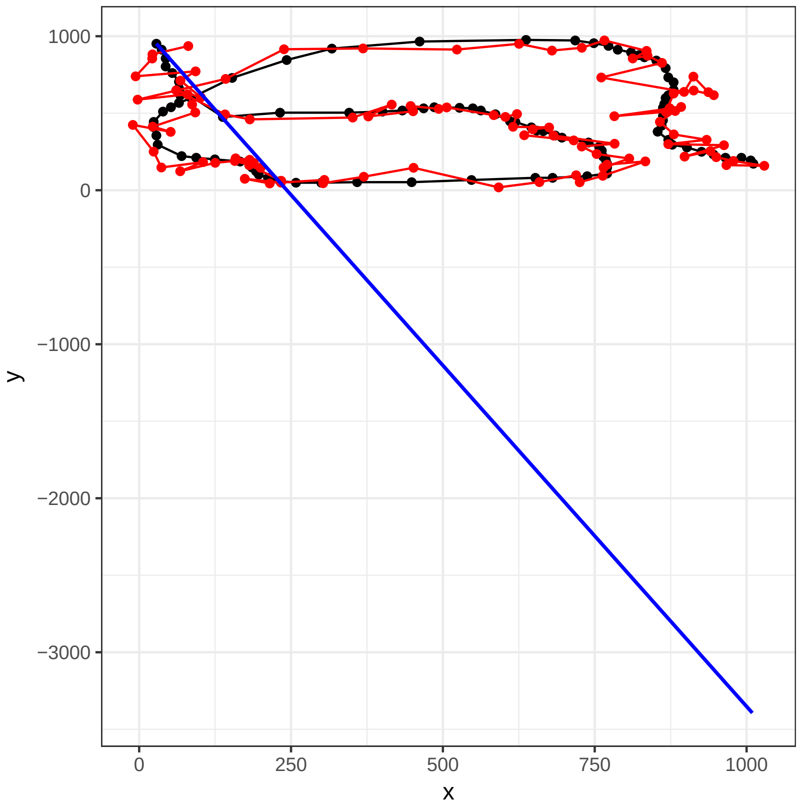
5.2 Pomiary GPS

Drugim przeprowadzonym eksperymentem było użycie filtru Kalmana w odszumianiu pomiarów zebranych poprzez urządzenie GPS. W tym celu zakupiony został mikrokontroler Arduino UNO oraz moduł GPS NEO-6M firmy u-blox. Przed przystąpieniem do pracy z pomiarami, należało w odpowiedni sposób przygotować oba urządzenia. Proces ten został opisany w Dodatku B.

W eksperymencie brane były pod uwagę współrzędne szerokości oraz długości geograficznej, a także czas pobrania informacji, na podstawie których wyznaczane były kolejne wektory prędkości. Pominięto zakrzywienie Ziemi i założono, że długość geograficzna odpowiada współrzędnej x położenia a szerokość geograficzna odpowiada współrzędnej y położenia.

5.2.1 Symulacje komputerowe

Dane do symulacji zebrano podczas jazdy samochodem wzdłuż ulic centrum miasta w Zielonej Górze. Trasy zostały dobrane w taki sposób, aby podczas namierzania GPS



Rysunek 8: Działanie filtru Kalmana w pierwszym przypadku. Linia i punkty koloru czarnego oznaczają prawdziwą trajektorię, czerwonego - pomiary, linia koloru niebieskiego - wyestymowane wartości.

sygnał odbijał się od budynków, co miałoby wpłynąć na powstawanie losowego szumu pomiarowego. Po naniesieniu obserwacji na mapę okazało się, że pomiar jest niedokładny, ponieważ nie wskazuje na rzeczywisty ruch pojazdu po ulicy, ale nie ma losowych wahań. Na Rysunku 9, który przedstawia wyniki jazdy samochodem, widzimy, że krzywa ruchu jest w miarę gładka. Oznacza to, że w urządzeniu prawdopodobnie zaimplementowano filtr odszumiający, a zatem zastosowanie filtru Kalman niejako mija się celem.

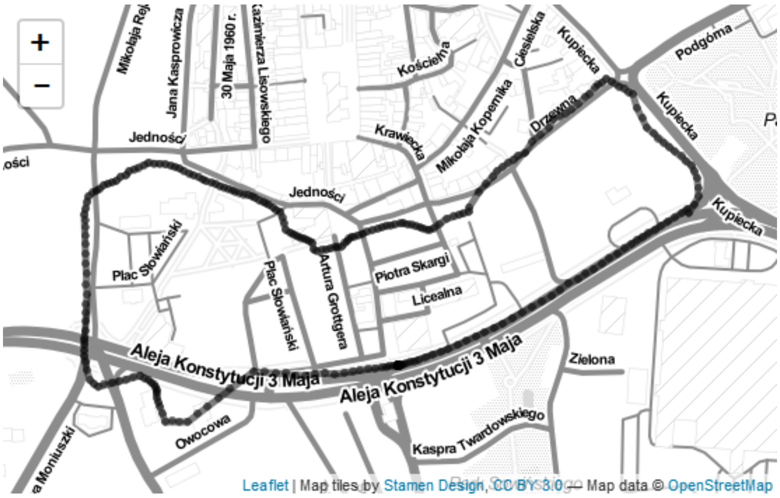
Chcąc przetestować użyteczność filtru Kalmana, do pomiarów sztucznie wprowadzony został losowy błąd. Założono, że macierz kowariancji błędu pomiarowego R jest stała i przyjmuje postać

$$R = \begin{bmatrix} 7.31025 \cdot 10^{-9} & 0 \\ 0 & 8.166375 \cdot 10^{-9} \end{bmatrix},$$

co odpowiada błędowi o odchyleniu standardowym równym około 10 metrów na każdej współrzędnej. Przykładowa realizacja zaszumionych pomiarów przedstawiona została na Rysunku 10.

Symulacja przeprowadzona została dla modelów nie uwzględniających przyspieszenia. W przypadku modelu pierwszego, opisanego równaniem (5), wektor prędkości został wyznaczony na podstawie pomiarów, korzystając ze wzoru

$$\dot{x}_k = \frac{Z_k - Z_{k-1}}{\Delta t}.$$



Rysunek 9: Pomiary z odbiornika GPS NEO-6M.

Rysunek 10: Pomiary z odbiornika GPS NEO-6M z dodanym szumem.

W obu przypadkach macierz $P_{0|0} = 0$ oraz $x_0 = Z_0$, gdzie x_0 oznacza składową wektora stanu odnoszącą się do położenia obiektu. W przypadku modelu drugiego, opisanego wzorem (6) założono, iż początkowa prędkość obiektu $\dot{x}_0 = 0$. Ponadto przyjęto, że macierze kowariancji Q_k są stałe, tzn. $Q_k = Q$ i przyjmują postać

$$Q = \begin{bmatrix} 10^{-12} & 0 \\ 0 & 10^{-12} \end{bmatrix}$$

dla modelu pierwszego oraz

$$Q = \begin{bmatrix} 10^{-12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-12} \end{bmatrix}$$

dla modelu drugiego.

Rysunek 11: Estymacja z użyciem filtru Kalmana przy założeniu pierwszego modelu ruchu.

Rysunki 11 i 12 pokazują wyniki przeprowadzonej filtracji, przy wyżej podanych założeniach. Rzecz jasna, w przypadku modelu pierwszego wyniki powinny pokrywać się z rzeczywistymi pomiarami odbiornika GPS. Widzimy jednak, że estymacja przy założeniu drugiego modelu ruchu również daje satysfakcjonujące wyniki. Pomiar jest w dużej mierze odszumiony i tym samym zbliżony do oryginalnego. Warto wspomnieć o ostatecznej postaci wzmocnienia Kalmana w obu przypadkach. Przy założeniu modelu pierwszego wzmocnienie Kalmana G_k przyjmuje postać

$$G_k = \begin{bmatrix} 0.03630806 & 0.00 \\ 0.00 & 0.03438642 \end{bmatrix},$$

zaś przy założeniu modelu drugiego mamy

$$G_k = \begin{bmatrix} 0.24034102 & 0.00 \\ 0.00 & 0.23450160 \\ 0.03223615 & 0.00 \\ 0.00 & 0.03061664 \end{bmatrix}$$

Widzimy, że w pierwszym przypadku korekta położenia jest niewielka. Jest to oczywiście spowodowane tym, że macierz Q w porównaniu do macierzy R zawiera stosunkowo niewielkie wartości. W drugim przypadku korekta jest również niewielka, ale w przypadku położenia już bardziej znacząca niż w modelu pierwszym. Przyglądając się równaniu (16) oraz macierzy A_k w modelu drugim (11) widzimy, że przy predykcji macierzy $P_{k|k-1}$ do szumu położenia dodawany jest również szum prędkości, co rzutuje na dalsze wyznaczenie macierzy G_k. Z kolei przy predykcji macierzy $P_{k|k-1}$ w modelu pierwszym macierz A_k jest macierzą jednostkową i nie ma dodatkowego elementu związanego z błędem prędkości, co skutkuje tym, iż kolejne macierze $P_{k|k-1}$, a zatem także wzmocnienie Kalmana G_k będą miały niewielkie wartości.

Rysunek 12: Estymacja z użyciem filtru Kalmana przy założeniu drugiego modelu ruchu.

5.2.2 Wnioski

Zauważmy, że jeśli dostępne są jedynie pomiary położenia, wówczas funkcja filtru Kalmana redukuje się do niwelowania szumu pomiarowego. Jednak, aby filtr dobrze spełniał swoje zadanie, powinien być sparametryzowany w sposób uwzględniający wiedzę dotyczącą obserwowanego procesu. Po zebraniu danych możemy eksperymentować z wartościami parametrów filtru Kalmana, tak aby uzyskać jak najlepsze wyniki. Jednak jego faktyczne zastosowanie odbywa się przede wszystkim w czasie rzeczywistym. Dlatego też, zarówno powyższy eksperyment, jak i aplikacja przedstawiona w sekcji 5.1 stanowią wstęp do praktycznego użycia filtru Kalmana, pozwalając na wyrobienie pewnej intuicji, dzięki której łatwiej nam dobrać właściwe parametry. Warto wspomnieć, że stosuje się również podejścia, które integrują pomiary GPS z pomiarami pobranymi z innych urządzeń, takich jak akcelerometr, czy żyroskop [11] [12]. Dzięki dodatkowym danym, możliwe jest uzyskanie jeszcze lepszego odwzorowania trajektorii ruchu. Wciąż jednak warunkiem koniecznym poprawnego działania filtru Kalmana jest odpowiedni opis problemu i właściwa parametryzacja.

6 Nieliniowy układ dynamiczny

Rozważaliśmy modele, które da się zapisać w postaci stochastycznego liniowego systemu dynamicznego (14). Wiemy jednak, że w wielu przypadkach zależności w układzie dynamicznym są nieliniowe. Przykładem może tu być ruch satelity wokół Ziemi, który opisujemy przy pomocy odpowiednich kątów. Rozważmy zatem nieliniowy model systemu dynamicznego postaci

$$\begin{cases} X_{k+1} &= f_k(X_k) + \epsilon_k \\ W_k &= g_k(X_k) + \delta_k \end{cases}, \tag{20}$$

gdzie f_k i g_k są funkcjami wektorowymi takimi, że dla każdego k $f_k(X_k)$ oraz $g_k(X_k)$ mają ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu po wszystkich składnikach wektora

X_k. Przyjmujemy jak poprzednio, że ciągi $\{\epsilon_k\}$ oraz $\{\delta_k\}$ są ciągami białego szumu o rozkładach normalnych ze średnimi $\mathbf{E}(\epsilon_k) = \mathbf{E}(\delta_k) = 0$ oraz znanymi macierzami kowariancji $\mathbf{Cov}(\epsilon_k) = Q_k$ i $\mathbf{Cov}(\delta_k) = R_k$ dla dowolnego $k = 0, \ldots, n$. Ponadto zakładamy, iż spełnione są warunki

$$\mathbf{E}(\epsilon_k \delta_l^T) = 0, \quad \mathbf{E}(X_0 \epsilon_k^T) = 0, \quad \mathbf{E}(X_0 \delta_k^T) = 0,$$

dla dowolnych k oraz l.

W przypadku modelów nieliniowych powszechnie stosowaną metodą jest linearyzacja, która umożliwia ich łatwiejszą analizę. Chcemy zatem dokonać linearyzacji modelu (20). Przyjmujemy, że początkowa estymata $\hat{X}_0 = \hat{X}_{0|0}$ oraz wyznaczona pozycja $\hat{X}_{1|0}$ są dane wzorami

$$\hat{X}_0 = \mathbf{E}(X_0) \quad \text{oraz} \quad \hat{X}_{1|0} = f_0(\hat{X}_0)$$

i chcemy wyznaczyć $\hat{X}_k = \hat{X}_{k|k}$ dla kolejnych $k = 1, \ldots, n$.

Stosując wzór Taylora przybliżamy funkcję f_k w punkcie $\hat{X}_k$ oraz funkcję g_k w punkcie $\hat{X}_{k|k-1}$. Mamy zatem

$$\begin{aligned} f_k(X_k) &\approx f_k(\hat{X}_k) + A_k(X_k - \hat{X}_k), \\ g_k(X_k) &\approx g_k(\hat{X}_{k|k-1}) + C_k(X_k - \hat{X}_{k|k-1}), \end{aligned} \tag{21}$$

gdzie

$$A_k = \left[\frac{\partial f_k}{\partial X_k}(\hat{X}_k)\right] \quad \text{oraz} \quad C_k = \left[\frac{\partial g_k}{\partial X_k}(\hat{X}_{k|k-1})\right]. \tag{22}$$

Niech

$$u_k = f_k(\hat{X}_k) - A_k \hat{X}_k$$

oraz

$$Z_k = W_k - g_k(\hat{X}_{k|k-1}) + C_k \hat{X}_{k|k-1}.$$

Zauważmy, że korzystając z powyższych równań oraz (20) i (21) otrzymujemy system liniowy postaci

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_{k+1} &=& A_k X_k + u_k + \epsilon_k \\ Z_k &=& C_k X_k + \delta_k \end{array} \right., \tag{23}$$

będący linearyzacją systemu nieliniowego (20).

7 Nieliniowy filtr Kalmana

W poprzednich rozdziałach omawialiśmy liniowy filtr Kalmana, stosowany w przypadku, gdy opisywane zjawisko da się przedstawić w postaci liniowego układu dynamicznego. Ogólniej, jeśli zjawisko przejawia nieliniowy charakter i da się opisać za pomocą modelu (20), to do odszumienia pomiarów można użyć nieliniowego filtru Kalmana, znanego w literaturze pod nazwą *Extended Kalman Filter* [13], będącego modyfikacją wersji liniowej.

Niech zatem dany będzie układ dynamiczny postaci (20). Analogicznie, jak w przypadku liniowego filtru Kalmana zakładamy, że znane są macierz $\mathbf{Var}(X_0)$ oraz wektor $\mathbf{E}(X_0)$ i przyjmujemy $P_{0|0} = \mathbf{Var}(X_0)$ oraz $\hat{X}_0 = \mathbf{E}(X_0)$. Tak jak poprzednio procedura wyznaczania estymaty $\hat{X}_k$ składa się z dwóch faz: fazy predykcji oraz fazy korekcji.

7.1 Faza predykcji

W tej fazie przyglądamy się estymacie wektora stanu X_k przed pojawieniem się pomiaru W_k. Estymata $\hat{X}_{k|k-1}$ wyznaczona jest ze wzoru

$$\hat{X}_{k|k-1} = f_{k-1}(\hat{X}_{k-1}).$$

Wyznaczamy również macierz kowariancji $P_{k|k-1}$ korzystając z relacji

$$P_{k|k-1} = \left[\frac{\partial f_{k-1}}{\partial X_{k-1}}(\hat{X}_{k-1})\right] P_{k-1|k-1} \left[\frac{\partial f_{k-1}}{\partial X_{k-1}}(\hat{X}_{k-1})\right]^T + Q_{k-1}.$$

7.2 Faza korekcji

W tej fazie wyznaczamy wzmocnienie Kalmana G_k ze wzoru

$$\begin{aligned} G_k &= P_{k|k-1} \left[\frac{\partial g_{k-1}}{\partial X_{k-1}}(\hat{X}_{k|k-1})\right]^T \\ &\cdot \left[\left[\frac{\partial g_{k-1}}{\partial X_{k-1}}(\hat{X}_{k|k-1})\right] P_{k|k-1} \left[\frac{\partial g_{k-1}}{\partial X_{k-1}}(\hat{X}_{k|k-1})\right]^T + R_k\right]^{-1} \end{aligned} \tag{24}$$

i stosujemy je do wyznaczenia korekty estymaty wektora stanu

$$\hat{X}_{k|k} = \hat{X}_{k|k-1} + G_k(W_k - g_k(\hat{X}_{k|k-1})) \tag{25}$$

oraz macierzy kowariancji $P_{k|k}$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - G_k \left[\frac{\partial g_{k-1}}{\partial X_{k-1}}(\hat{X}_{k|k-1})\right] P_{k|k-1}. \tag{26}$$

Powyższa procedura powtarzana jest rekurencyjnie aż do wyczerpania pomiarów.

7.3 Zastosowanie

We Wprowadzeniu przedstawione zostało pierwsze znane zastosowanie filtru Kalmana, związane z nawigacją statku kosmicznego.

Dziś żyjemy w dobie informacji, a fizycznym nośnikiem informacji jest cyfrowy sygnał. Dlatego wszędzie tam, gdzie pobieramy informację i gdzie źródło tej informacji jest znane, istnieje możliwość użycia filtru Kalmana w celu odszumienia sygnału. Fakt ten otwiera przed filtrem Kalmana niezwkle szerokie spektrum zastosowań. Podajmy kilka z nich:

Logistyka i transport. Jednym z przykładów zastosowania filtru Kalmana, niezwiązanym z nawigacją GPS, w logistyce i transporcie jest oszacowanie natężenia ruchu drogowego w czasie rzeczywistym [14] [15] [16].

Biotechnologia Procesy biotechnologiczne charakteryzują się dużą złożonością. Modele matematyczne, opisujące te złożone zjawiska nierzadko są w dużym stopniu uproszczone. Nielinowy filtr Kalmana pozwala połączyć nieliniowość procesów biotechnicznych z możliwością odszumiania pomiarów, zbieranych podczas obserwacji tych procesów. Ta własność pozwoliła na jego zastosowanie w estymacji stanu procesu fermentacji drożdży [17].

Elektronika. Ciekawym zastosowaniem rozszerzonego filtru Kalmana w elektronice jest szacowanie stanu naładowania baterii elektrycznych. Niewątpliwym atutem filtru Kalmana jest możliwość kontrolowania jego parametrów w czasie rzeczywistym, co pozwala na jego zastosowanie w przypadku, gdy należyć uwzględnić proces starzenia się baterii [18] [19].

Uczenie maszynowe i *deep learning.* Przykładem zastosowania nieliniowego filtru Kalmana, niezwiązanego z odszumianiem pomiarów pochodzących z rzeczywistych urządzeń pomiarowych jest jego zastosowanie w uczeniu maszynowym. Algorytm został zaimplementowany w celu polepszenia procesu nauczania sieci neuronowych. Okazuje się, iż stosując filtr Kalmana możliwe jest osiągnięcie dobrych wyników klasyfikacji przy stosunkowo niewielkiej liczbie danych treningowych [20].

8 Podsumowanie

Celem niniejszej pracy było wyprowadzenie równań opisujących rzeczywisty ruch obiektu oraz pomiar położenia tego obiektu. Kolejnym zadaniem, założonym w niniejszej pracy było przeprowadzenie estymacji trajektorii przy użyciu filtru Kalmana. Dodatkowo, stworzona została poglądowa aplikacja, w sposób graficzny prezentująca działanie filtru. Według Autora niniejsza praca posiada duży walor dydaktyczny. Szczególnie cenna w zrozumieniu filtru Kalmana na przykładzie modelów ruchu jest interaktywna aplikacja, dzięki której użytkownik może wizualnie ocenić wpływ dobranych przez niego parametrów na funkcjonowanie filtru. Użytkownik ma możliwość zmiany następujących parametrów: macierzy kowariancji szumu procesowego Q_k, macierzy kowariancji szumu pomiarowego R_k, początkowego stanu obiektu X_0 oraz początkowej macierzy kowariancji *a priori* P_0. Na wykresach konturowych zawartych w aplikacji uwidocznione zostały rozkłady pomiarów Z_k oraz estymat wektora stanu X_k. Ponadto na wykresie głównym ukazana została prawdziwa trajektoria ruchu, zaszumiony pomiar oraz trajektoria wyznaczona za pomocą filtru Kalmana.

Poprzez przeprowadzone symulacje odszumiania trajektorii ruchu przy zastosowaniu filtru Kalmana udało się wyłuskać najistotniejsze elementy tego narzędzia, jakimi są znajomość obserwowanego procesu, poprawnie dobrany model oraz parametry opisujące błąd pomiarowy. Choć wykorzystanie w praktyce filtru Kalmana nie wymaga zaawansowanej wiedzy matematycznej, to jednak widzimy, że jego działanie opiera się na narzędziach matematycznych, zdobyczach algebry liniowej oraz rachunku prawdopodobieństwa.

Przeprowadzone analizy filtru Kalmana oraz symulacje jego działania otwierają ciekawe perspektywy na prowadzenie dalszych badań, szczególnie w kierunku rozbudowy modelu ruchu i zastosowania filtru do przypadku nieliniowego.

Dodatek

A Korzystanie z aplikacji

Jednym z elementów niniejszej pracy jest interaktywna aplikacja, umożliwiająca badanie działania filtru Kalmana poprzez eksperymentowanie z jego parametrami. Dostępna jest ona pod adresem `https://karylsienn.shinyapps.io/liniowyfiltrkalmana/`. Aplikacja nie posiada w pełni rozbudowanej obsługi błędów, zatem korzystanie z niej powinno przebiegać według następującego scenariusza.

1. Użytkownik wybiera numer reprezentujący model, który służyć ma opisowi zjawiska (numeracja modelów w aplikacji jest zgodna z numeracją modelów w niniejszej pracy).
2. Użytkownik wprowadza odpowiednie wartości do macierzy kowariancji R_k, Q_k i R_k', pamiętając o tym, że macierze te muszą być symetryczne.
3. Użytkownik wprowadza odpowiednie początkowe wartości X_0 oraz P_0.
4. Użytkownik potwierdza dobór modelu oraz wprowadzone zmiany w macierzach kowariancji przyciskiem `Potwierdzam`.
5. Na głównym panelu ukazuje się wykres zawierający punkt początkowy oraz osie x_1 i x_2.
6. Użytkownik klika myszką w dowolne miejsca wykresu, symulując ruch obiektu.
7. Poniżej głównego wykresu znajdują się trzy wykresy konturowe, reprezentujące rozkłady kolejno
   - szumu pomiarowego,
   - estymaty *a priori*,
   - estymaty *a posteriori*,

   służące do zobrazowania procesu zmian rozkładów wyznaczanych kolejno w czasie działania filtru.
8. Zmiana wartości macierzy kowariancji Q_k, R_k oraz R_k' może odbywać się w dowolnym momencie działania programu.
9. Zmiana modelu oraz wartości początkowych usuwa dotychczasowe symulacje. W celu przeprowadzenia symulacji z innym modelem, użytkownik potwierdza wprowadzone zmiany przyciskiem `Potwierdzam`.
10. W celu wyczyszczenia ekranu i rozpoczęcia symulacji na nowo, użytkownik używa przycisku `Wyczyść`.

Podczas działania aplikacji może się zdarzyć, iż wykresy konturowe nie będą pokazywane. Taka sytuacja ma miejsce, gdy jedna z macierzy kowariancji *a priori* lub *a posteriori* jest źle określona, co może być konsekwencją zarówno symulowanego ruchu, jak i podanych przez użytkownika macierzy kowariancji. Często jednak zła określoność tych macierzy może nie wpłynąć źle na działanie filtru. Żeby jednak uniknąć takich problemów należy pamiętać o symetryczności oraz dodatniej określoności dobieranych macierzy kowariancji.

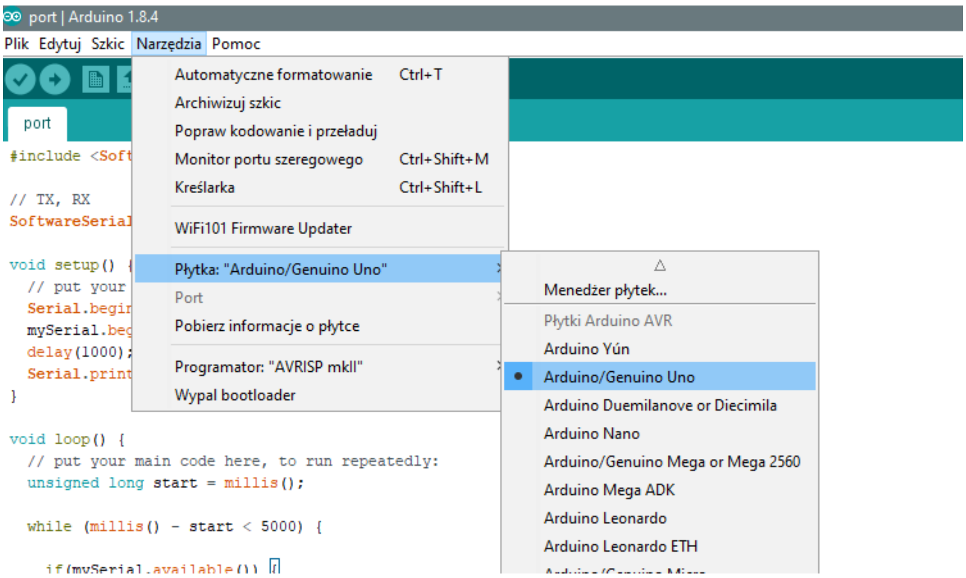
B Przygotowanie do pracy z pomiarami GPS

Przed przystąpieniem do implementacji samego filtru Kalmana i jego wykorzystania przy użyciu danych GPS, należało w odpowiedni sposób przygotować instrumenty pomiarowe.

B.1 Mikrokontroler Arduino oraz moduł GPS NEO-6M

Proces instalacji oprogramowania do mikrokontrolera Arduino opisany jest wyczerpująco na stronie `https://www.arduino.cc/en/Guide/Windows` [dostęp: 12.02.2018] i w naszym przypadku redukował się do pobrania Instalatora (`.exe`), a następnie uruchomienia go i zainstalowania wraz z wszystkimi domyślnymi opcjami.

Po uruchomieniu aplikacji Arduino należało wybrać model płytki poprzez wybranie z paska menu opcji `Narzędzia > Płytka` i następnie opcji `Arduino/Genuino Uno`, tak jak na Rysunku 13.

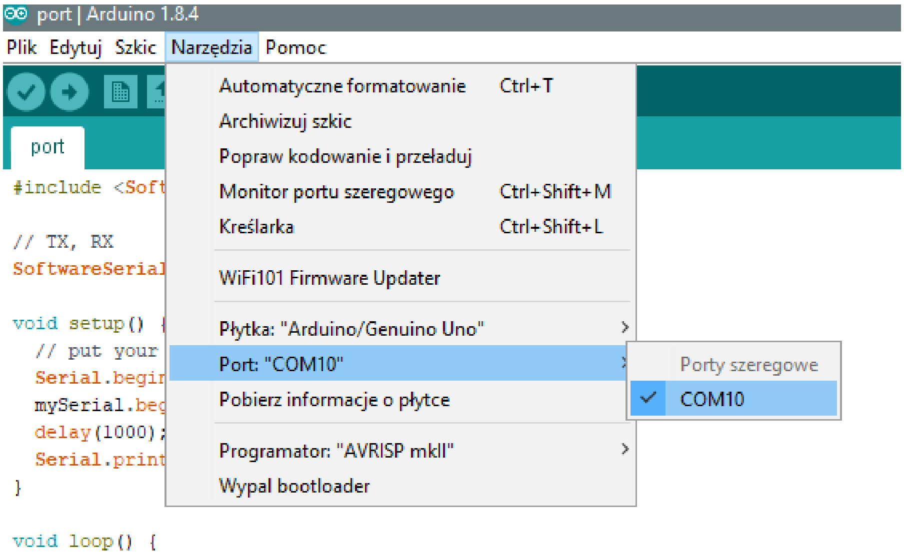


Rysunek 13: Wybór modelu płytki w środowisku Arduino.

Kolejnym krokiem było odpowiednie podłączenie modułu NEO-6M do płytki Arduino UNO. Odpowiednie połączenia przedstawiają się następująco:

- pin `VCC` w module GPS należy podłączyć do pinu `5V` na płytce Arduino,
- pin `GND` w module GPS należy podłączyć do pinu `GND` na płytce Arduino,
- pin `TX` w module GPS należy podłączyć do pinu `D11` na płytce Arduino,
- pin `RX` w module GPS należy podłączyć do pinu `D10` na płytce Arduino.

Po podłączeniu płytki Arduino wraz z modułem GPS do komputera za pomocą kabla USB należało wybrać odpowiedni port, do którego podpięty został kabel USB. Należało z paska menu wybrać zakładkę `Narzędzia > Port`, a następnie wybrać z listy port do którego podłączone zostało urządzenie. W przykładzie widniejącym na Rysunku 14 odpowiednim portem był port `COM10`.



Rysunek 14: Wybór portu szeregowego.

B.2 Oprogramowanie

Korzystanie z urządzenia GPS opierało się na przechwytywaniu wiadomości odbieranych lub generowanych przez to urządzenie. W tym celu użyto biblioteki `SoftwareSerial`, która umożliwia komunikacyjnę szeregową pomiędzy komputerem a cyfrowymi pinami mikrokontrolera Arduino (`https://www.arduino.cc/en/Reference/SoftwareSerial` [dostęp: 12.02.2018]). Transmisja sygnału ustawiona była na szybkość 9600 bitów na sekundę. Prosty program umożliwiający przechwytywanie wiadomości związanych z urządzeniem GPS został przedstawiony poniżej.

```
#include <SoftwareSerial.h>

// Ustawienie pinow TX i RX na D11 i D10
SoftwareSerial mySerial(11, 10);

// Inicjalizacja
void setup() {
  // Szybkosc transmisji 9600 bit/s
  Serial.begin(9600);
  mySerial.begin(9600);
  delay(1000);
  Serial.println();
}
```

```
// Glowny program
void loop() {
  unsigned long start = millis();

  // Co 5 sekund czytaj wiadomosc
  // z portu szeregowego
  while (millis() - start < 5000)
  {
    if (mySerial.available())
    {
      char c = mySerial.read();
      // Wypisz wiadomosc na monitor portu
      Serial.print(c);
    }
  }
}
```

Po skompilowaniu powyższego programu należało wgrać go na płytkę. Działający program wypisywał na monitorze portu szeregowego wiadomości typu:

```
$GPGLL,5156.67917,N,01528.17511,E,012956.00,A,A*64
$GPRMC,012957.00,A,5156.67728,N,01528.16716,E,3.221,,060218,,,A*75
$GPVTG,,T,,M,3.221,N,5.964,K,A*2F
$GPGGA,012957.00,5156.67728,N,01528.16716,E,1,05,4.33,79.4,M,40.7,M,,*6E
$GPGSA,A,3,10,21,15,27,08,,,,,,,,6.35,4.33,4.64*0B
$GPGSV,2,1,08,08,60,292,25,10,68,099,39,15,08,028,33,16,19,197,*71
$GPGSV,2,2,08,18,40,060,,21,16,085,29,27,72,165,35,32,,,38*46
$GPGLL,5156.67728,N,01528.16716,E,012957.00,A,A*63
...
```

Odbieranie wiadomości pochodzących z modułu GPS oraz ich przetwarzanie odbywało się w środowisku `R` przy użyciu pakietu `serial`.

B.3 Standard NMEA

Wiadomości nadawane przez urządzenie GPS były zgodne ze standardem NMEA 0183 - protokołem komunikacji opublikowanym przez *National Marine Electronics Association* opisanym na stronie `http://home.mira.net/ gnb/gps/nmea.html` [dostęp: 11.02.2018]. Standard NMEA jest powszechnie używany w komunikacji między urządzeniami nawigacji morskiej oraz urządzeniami GPS. Głównym źródłem informacji dla naszego eksperymentu było zdanie `GPRMC`.

Poniżej przedstawione zostało przykładowe zdanie `GPRMC` wraz z opisem poszczególnych fragmentów.

```
$GPRMC,012956.00,A,5156.67917,N,01528.17511,E,0.535,,060218,,,A*73
```

012956.00	Czas pobrania informacji 01:29:56.00 UTC
A	Wiadomość odbiornika: A = Poprawna pozycja, V = Ostrzeżenie
5156.67917,N	Szerokość geograficzna 51 stopni 56.67917 minut na półkuli północnej
01528.17511,E	Długość geograficzna 15 stopni 28.17511 minut na półkuli wschodniej
0.535	Prędkość na powierzchni ziemi w węzłach
<brak>	Kurs w stopniach
061117	Data pobrania informacji, 6 listopada 2017 roku
<brak>, <brak>	Wariacja magnetyczna w stopniach oraz jej kierunek
A*73	Suma kontrolna.

Literatura

[1] R. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems", *Journal of Basic Engineering*, vol. 82, pp. 35–45, 1960.

[2] L. Mcgee, *Discovery of the Kalman filter as a practical tool for aerospace and industry.* NASA, 1985.

[3] M. Kałuszka and L. Gajek, *Wnioskowanie statystyczne. Modele i metody.* Wydawnictwa Naukowo Techniczne PWN-WNT, 1999.

[4] C. K. Chui and G. Chen, *Kalman Filtering with Real-time Applications.* New York, NY, USA: Springer-Verlag New York, Inc., 1987.

[5] P. Hewitt, *Fizyka wokół nas.* Wydawnictwo Naukowe PWN, 2015.

[6] W. Bolton, *Zarys fizyki.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1982.

[7] A. Rencher and G. Schaalje, *Linear Models in Statistics.* Wiley, 2008.

[8] C. Rao, A. Fieger, C. Heumann, H. Toutenburg, T. Nittner, and S. Scheid, *Linear Models: Least Squares and Alternatives.* Springer Series in Statistics, Springer New York, 2006.

[9] V. A. Bavdekar, A. P. Deshpande, and S. C. Patwardhan, "Identification of process and measurement noise covariance for state and parameter estimation using extended kalman filter", *Journal of Process Control*, vol. 21, no. 4, pp. 585 – 601, 2011.

[10] B. Feng, M. Fu, H. Ma, Y. Xia, and B. Wang, "Kalman filter with recursive covariance estimation. sequentially estimating process noise covariance", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, pp. 6253–6263,

[11] C. Hide, T. Moore, and M. Smith, "Adaptive kalman filtering for low-cost ins gps", *Journal of Navigation*, vol. 56, no. 1, pp. 143–152, 2003.

[12] L. Zhao, W. Y. Ochieng, M. A. Quddus, and R. B. Noland, "An extended kalman filter algorithm for integrating gps and low cost dead reckoning system data for vehicle performance and emissions monitoring", *Journal of Navigation*, vol. 56, no. 2, pp. 257–275, 2003.

[13] E. Brookner, *Tracking and Kalman Filtering Made Easy.* John Wiley & Sons, Inc., 1998.

[14] Y. Niu and L. Hu, "An extended kalman filter application on moving object tracking", in *Proceedings of the 5th International Conference on Electrical Engineering and Automatic Control* (B. Huang and Y. Yao, eds.), (Berlin, Heidelberg), pp. 1261–1268, Springer Berlin Heidelberg, 2016.

[15] Y. Wang and M. Papageorgiou, "Real-time freeway traffic state estimation based on extended kalman filter: a general approach", *Transportation Research Part B: Methodological*, vol. 39, no. 2, pp. 141 – 167, 2005.

[16] C. M. J. Tampere and L. H. Immers, "An extended kalman filter application for traffic state estimation using ctm with implicit mode switching and dynamic parameters", in *2007 IEEE Intelligent Transportation Systems Conference*, pp. 209–216, 2007.

[17] K.-H. Bellgardt, W. Kuhlmann, H.-D. Meyer, K. Schügerl, and M. Thoma, "Application of an extended kalman filter for state estimation of a yeast fermentation", *IEE Proceedings D (Control Theory and Applications)*, vol. 133, pp. 226–234(8), 1986.

[18] G. L. Plett, "Extended kalman filtering for battery management systems of lipb-based hev battery packs: Part 3. state and parameter estimation", *Journal of Power Sources*, vol. 134, no. 2, pp. 277 – 292, 2004.

[19] H. He, R. Xiong, X. Zhang, F. Sun, and J. Fan, "State-of-charge estimation of the lithium-ion battery using an adaptive extended kalman filter based on an improved thevenin model", *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 60, pp. 1461–1469, 2011.

[20] G. V. Puskorius and L. A. Feldkamp, "Decoupled extended kalman filter training of feedforward layered networks", in *IJCNN-91-Seattle International Joint Conference on Neural Networks*, vol. i, pp. 771–777 vol.1, 1991.

[21] J. Cheng, B. Karambelkar and Y. Xie, *leaflet: Create Interactive Web Maps with the JavaScript 'Leaflet' Library*, R package version 1.1.0, 2017.

[22] H. Wickham, *tidyverse: Easily Install and Load the 'Tidyverse'*, R package version 1.2.1, 2017.

[23] J. Owen, *rhandsontable: Interface to the 'Handsontable.js' Library*, R package version 0.3.6.

[24] W. Chang, J. Cheng, JJ. Allaire, Y. Xie and J. McPherson, *shiny: Web Application Framework for R*, R package version 1.0.5, 2017.

[25] W. N. Venables and B. D. Ripley *Modern Applied Statistics with S*, Springer, 2002.

[26] A. Azzalini and A. Genz,*The R package mnormt: The multivariate normal and t distributions (version 1.5-5)*, 2016.