CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

PESEL

Miejsce na naklejkę.
Sprawdź, czy kod na naklejce to
M-100.
Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny *Formuła 2023*

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

TEST DIAGNOSTYCZNY

Symbol arkusza
MMAP-R0-100-2212

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:

- ☐ dostosowania zasad oceniania
- ☐ dostosowania w zw. z dyskalkulią
- ☐ nieprzenoszenia zaznaczeń na kartę.

DATA: **19 grudnia 2022 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

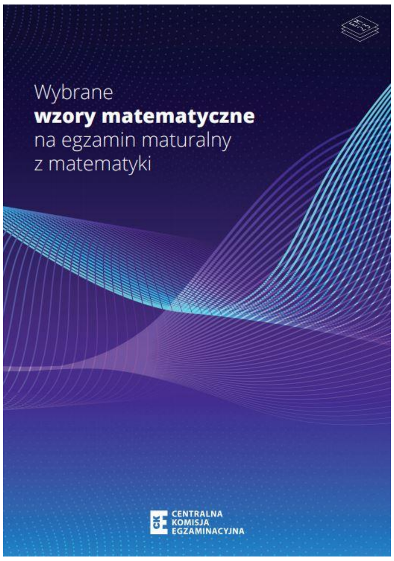
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 25 stron (zadania 1–12). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Nie wpisuj żadnych znaków w tabelkach przeznaczonych dla egzaminatora. Tabelki umieszczone są na marginesie przy każdym zadaniu.
8. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
9. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



Zadania egzaminacyjne są wydrukowane na następnych stronach.

1.

0–1–2

Zadanie 1. (0–2)

Oblicz

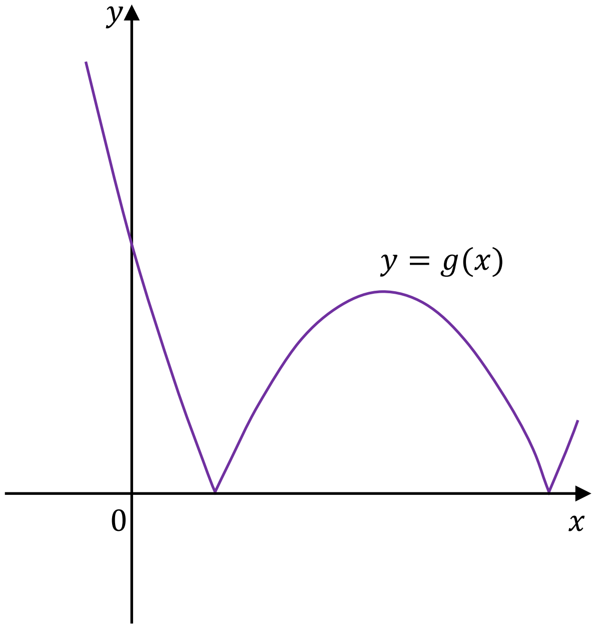
$$\frac{\log_3 5 \cdot \log_{25} 27}{\log_7 \sqrt[6]{49}}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 2.

Funkcja g jest określona wzorem $g(x) = \left|-\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5\right|$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Fragment wykresu funkcji g w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) przedstawiono na rysunku (jednostki pominięto).



Zadanie 2.1. (0–2)

Wyznacz zbiór wszystkich wartości, jakie funkcja g przyjmuje w przedziale $[9, 11]$.

Zapisz obliczenia.

2.1.
0–1–2

2.2.

0–1–2

Zadanie 2.2. (0–2)

Wyznacz zbiór wszystkich wartości parametru m, dla których równanie $g(x) = |m|$ ma dokładnie dwa rozwiązania dodatnie.

Zadanie 3. (0–3)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x oraz dla każdej liczby rzeczywistej y, spełniających warunek $x + y \geq 1$, prawdziwa jest nierówność

$$x^3 + 2xy + y^3 \geq x^2 + xy(x + y) + y^2$$

3. 0–1–2–3

Zadanie 4. (0–3)

Maszyna napełnia torebki herbatą. Każda torebka ma zostać napełniona 200 g herbaty. Torebkę, która zawiera mniej niż 200 g herbaty, nazywamy torebką z niedowagą. Prawdopodobieństwo tego, że pojedyncza torebka napełniona przez tę maszynę jest z niedowagą, jest równe $0{,}1$. Kontroli poddano masę herbaty w torebkach napełnianych przez tę maszynę danego dnia. Do kontroli wybrano losowo 20 torebek.

4. 0–1–2–3

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wśród tych 20 losowo wybranych torebek znajdą się co najwyżej dwie torebki z niedowagą.

Zapisz obliczenia. Wynik zapisz w zaokrągleniu do drugiego miejsca po przecinku.

Zadanie 5. (0–4)

Rozwiąż równanie

$$6\sin x + 2\sqrt{3}\cos x + 3\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$$

Zapisz obliczenia.

5.
0–1–2–3–4

Zadanie 6. (0–4)

W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne kątów przecinające boki BC, AC i AB tego trójkąta w punktach – odpowiednio – K, L oraz M. Punkt P jest punktem przecięcia tych dwusiecznych. Na czworokątach $CLPK$ oraz $BKPM$ można opisać okrąg.

6.
0–1–2–3–4

Udowodnij, że trójkąt ABC jest równoboczny.

Zadanie 7. (0–4)

Olejarnia wytwarza olej ekologiczny. Aby produkcja była opłacalna, dzienna wielkość produkcji musi wynosić co najmniej 480 litrów i nie może przekroczyć 530 litrów (ze względu na ograniczone moce produkcyjne). Przy poziomie produkcji $(480 + x)$ litrów dziennie przeciętny koszt K (w złotych) wytworzenia jednego litra oleju jest równy

$$K(x) = \frac{22x^2 - 621{,}5x + 23\,430}{480 + x}, \text{ gdzie } x \in [0, 50].$$

7. 0–1–2–3–4

Oblicz, ile litrów oleju dziennie powinna wytworzyć olejarnia, aby przeciętny koszt produkcji jednego litra oleju był najmniejszy (z zachowaniem opłacalności produkcji). Oblicz ten najmniejszy przeciętny koszt.

Zapisz obliczenia.

8.

0–1–2–3–4–5

Zadanie 8. (0–5)

Rozwiąż nierówność

$$\frac{x-1}{x^2-4} - \frac{1}{2-x} \geq \frac{3}{2+x} + 2$$

Zapisz obliczenia.

9.
0–1–2–3–4–5

Zadanie 9. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$x^2 - (m-4)x + m^2 - 7m + 12 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2, spełniające warunek

$$x_1^3 + x_2^3 < 5x_1^2 \cdot x_2 + 5x_1 \cdot x_2^2$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0–5)

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$ o podstawie $ABCD$. Krawędź podstawy tego ostrosłupa ma długość a. Ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem o mierze α takim, że $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$. Przez krawędź BC podstawy ostrosłupa poprowadzono płaszczyznę π prostopadłą do ściany bocznej SAD.

10.
0–1–2–3–4–5

Sporządź rysunek tego ostrosłupa, zaznacz na rysunku przekrój wyznaczony przez płaszczyznę π i nazwij figurę, która jest tym przekrojem. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0–5)

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, w którym $|AB| > |CD|$ oraz ramię BC ma długość 6. Na tym trapezie opisano okrąg o promieniu $R = 5$. Miary kątów BAC i ABC tego trapezu spełniają warunek

$$\frac{\sin|\sphericalangle BAC|}{\sin|\sphericalangle ABC|} = \frac{5}{8}$$

11.
0–1–2–3–4–5

Oblicz pole i obwód trapezu $ABCD$.

Zapisz obliczenia.

Zadanie 12. (0–6)

Prosta k o równaniu $x + y - 9 = 0$ przecina parabolę o równaniu $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$ w punktach A oraz B. Pierwsza współrzędna punktu A jest liczbą dodatnią; pierwsza współrzędna punktu B jest liczbą ujemną. Prosta l jest równoległa do prostej k i styczna do danej paraboli w punkcie C.

12. 0–1–2–3–4–5–6

Oblicz odległość punktu C od prostej k oraz pole trójkąta ABC.

Zapisz obliczenia.

BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023