

**WYPEŁNIA ZDAJĄCY**

**KOD**

--	--	--

**PESEL**

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

# EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

## POZIOM ROZSZERZONY

### Próbna Matura z Operonem 2023/2024

**TERMIN: 22 listopada 2023 r.**

**Czas pracy: 180 minut**

**LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: 50**

**WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY**

Uprawnienia zdającego do:

dostosowania zasad oceniania

dostosowania w zw. z dyskalkulią.

### Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 19 stron (zadania 1.–13.). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
7. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.

1.

0-1-2

### Zadanie 1. (0-2)

Oblicz wartość wyrażenia  $\frac{\log_5 7 \cdot \log_{49} 625}{\log_3 \sqrt[3]{2} - 2\log_3 \sqrt[6]{54}}$ . Zapisz obliczenia.



### Zadanie 2. (0–2)

Dana jest funkcja kwadratowa  $f$ . Miejsca zerowe tej funkcji spełniają warunek  $x_1 + x_2 = 8$ . Wiadomo, że  $f(0) > 0$  oraz funkcja  $f$  w przedziale  $[0, 6]$  przyjmuje wartość najmniejszą równą  $(-5)$  i wartość największą równą  $27$ .

Podaj wzór funkcji  $f$  w postaci kanonicznej. Zapisz obliczenia.

2.

0–1–2



3.

0-1-2

### Zadanie 3. (0-2)

Oblicz granicę ciągu  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6 + 11 + 16 + \dots + (5n + 1)}{7n^2 - 4}$ . Zapisz obliczenia.



**Zadanie 4. (0–3)**

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej  $x > 1$  oraz dla każdej liczby rzeczywistej  $y \in \mathbb{R}$  prawdziwa jest nierówność  $4x^3y^2 - 4y^2 - 12x^3y + 12y + 9x^3 - 8 > 0$ .

4.

0–1–  
2–3

--



5.

0-1-  
2-3

### Zadanie 5. (0–3)

Rozwiąż algebraicznie nierówność  $x + 5 > 3|x - 1|$ . Zapisz obliczenia.



### Zadanie 6. (0–3)

Na trapezie równoramiennym  $ABCD$ , w którym trzy boki mają taką samą długość, opisano okrąg o promieniu  $r$ . Dłuższa podstawa trapezu ma długość  $2r$ .

**Udowodnij, że przekątna trapezu ma długość  $r\sqrt{3}$ .**

6.

0–1–  
2–3



7.

0-1-  
2-3-4

### Zadanie 7. (0-4)

Rozwiąż równanie  $\sin\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = \sin 6x$ . Zapisz obliczenia.





**Zadanie 8. (0–4)**

Dana jest funkcja  $f$  określona wzorem  $f(x) = \frac{2x^2 - 8x + 8}{x - 4}$ , gdzie  $x \neq 4$ .

Wyznacz najmniejszą wartość funkcji  $f$  w przedziale  $[5, 10]$ . Zapisz obliczenia.

8.

0–1–

2–3–4



### Zadanie 9. (0–5)

Dana jest funkcja  $f$  określona wzorem  $f(x) = \frac{3}{2}x^4 + \frac{17}{3}x^3 + \frac{11}{2}x^2 - x - 5$  dla  $x \in \mathbb{R}$ .

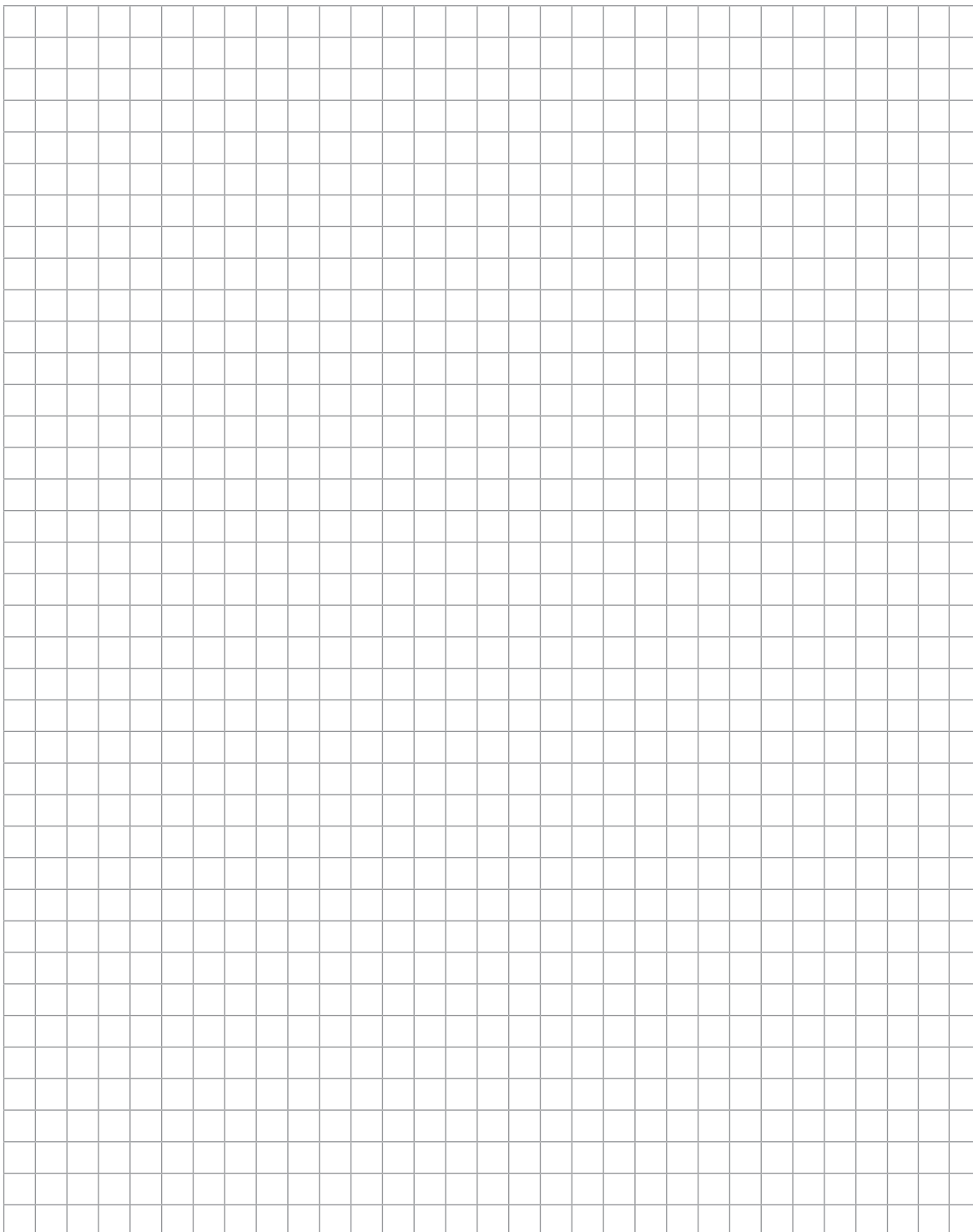
Wyznacz równanie tej stycznej do wykresu funkcji  $f$ , która jest prostopadła do prostej o równaniu  $y = \frac{1}{3}x + 15$ , a współrzędna odcięta  $x_0$  punktu styczności jest mniejsza od  $(-1)$ . Zapisz obliczenia.

9.

0–1–

2–3–

4–5



### Zadanie 10. (0–5)

Dany jest czworokąt wypukły  $ABCD$ , w którym  $|AD| = a$ ,  $|AB| = 2a$ . Dwusieczna kąta  $ADC$  przecięła prostą  $AC$  w punkcie  $E$  takim, że  $\frac{|AE|}{|CE|} = \frac{2}{3}$ . Obwód czworokąta  $ABCD$  wynosi 84.

W czworokąt można wpisać okrąg. Ponadto  $\cos \sphericalangle ADC = \frac{1}{16}$ .

Oblicz promienie okręgów opisanych na trójkącie  $ACD$  oraz na trójkącie  $ABC$ .

10.

0–1–

2–3–

4–5





### Zadanie 11. (0–5)

Dany jest czterowyrazowy ciąg  $(a, b, c, d)$ , który jest rosnącym ciągiem arytmetycznym o wyrazach dodatnich. Jeżeli do kwadratu sumy pierwszego i trzeciego wyrazu dodamy kwadrat różnicy drugiego i czwartego wyrazu, to otrzymamy kwadrat największego wyrazu ciągu. Ponadto ciąg  $(3a + 30, 3b, c + 2)$  jest geometryczny.

**Oblicz wszystkie wyrazy ciągu arytmetycznego. Zapisz obliczenia.**

11.
0–1–
2–3–
4–5



12.

0-1-  
2-3-  
4-5-6

### Zadanie 12. (0-6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których równanie  $x^2 + mx + 3 - m = 0$  ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste  $x_1, x_2$  o tych samych znakach, spełniające warunek

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > \frac{-2}{m+3}, \text{ gdzie } m \neq -3. \text{ Zapisz obliczenia.}$$





### Zadanie 13.

Dana jest prosta  $k$  o równaniu  $y = -\frac{1}{3}x - 1$  i punkt  $A(0, -1)$  leżący na prostej  $k$  oraz prosta  $l$  o równaniu  $y = -3x - 17$  i punkt  $B(-4, -5)$  należący do prostej  $l$ .

### Zadanie 13.1. (0–2)

13.1.

0–1–2

Wyznacz współrzędne punktu  $D$  należącego do prostej  $k$ , którego odległość od prostej  $l$  jest równa  $2\sqrt{10}$ .





**Zadanie 13.2. (0–4)**

Napisz równanie okręgu, który jest styczny do prostej  $k$  w punkcie  $A$  oraz do prostej  $l$  w punkcie  $B$ . Zapisz obliczenia.

13.2.

0–1–  
2–3–4

--



**BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)**



**BRUDNOPIS** (*nie podlega ocenie*)

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for writing a rough draft.

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: [arkusze.pl](http://arkusze.pl)

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: [arkusze.pl](http://arkusze.pl)

