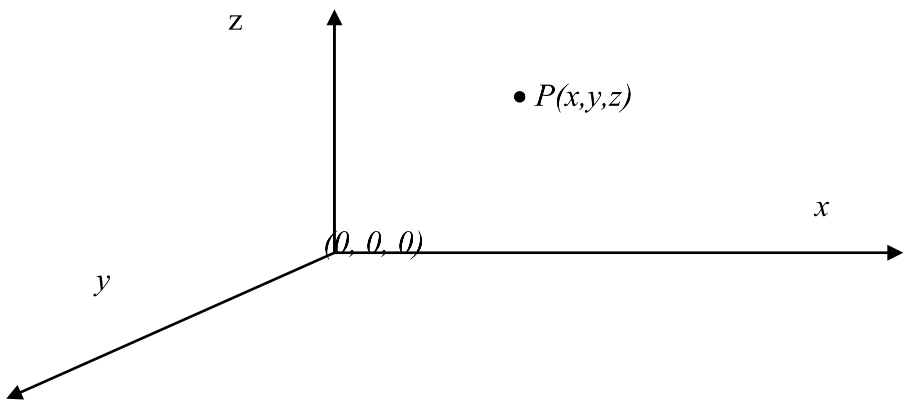
# WYKŁAD 9.

# ALGEBRA WEKTORÓW. PRZESTRZENIE WEKTOROWE

- ***PRZESTRZEŃ WEKTOROWA***

*Przestrzeń Euklidesowa* $E^3$ - zbiór punktów
*Współrzędne punktów w* $E^3$ – trójka liczb rzeczywistych
*Kartezjański układ współrzędnych w* $E^3$ –

- Początek układu, np. punkt $p_0$.
- Trzy wzajemnie prostopadłe proste poprowadzone przez punkt $p_0$ - osie *x, y, z* układu.
- Jednostki długości określone na każdej osi.
- Współrzędne $(a,b,c)$ punktu *p* – rzuty punktu *p* kolejno na osie *x, y, z.*




***Układy współrzędnych****: krzywoliniowe, cylindryczne, walcowe, sferyczne.*

**Uwaga**

Działania na zbiorach i punktach przestrzeni $E^3$ są równoważne działaniom na układach liczb rzeczywistych i ich zbiorach

**Uogólnienie na przestrzeń *n* – wymiarową**
*Przestrzeń Euklidesowa n – wymiarowa,* $E^n$

*Współrzędne punktów w* $E^n$ - układ *n* liczb,

$$(a_1, a_2, ..., a_n)$$

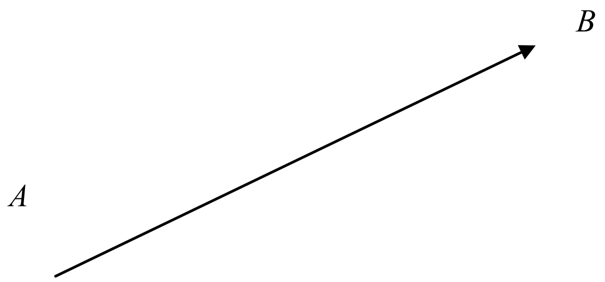
**Przykład**

$E^1$ *- zbiór punktów postaci (a), prosta liczbowa*
$E^2$ *- zbiór punktów postaci (a,b), płaszczyzna*
$E^4$ *- czasoprzestrzeń*

Analiza obiektów geometrycznych w terminach przedstawionej reprezentacji – ***geometria analityczna.***

**Definicja**

***Wektorem*** nazywamy uporządkowaną parę punktów
*(A, B)*, czyli odcinek skierowany o początku w punkcie *A* i o końcu w punkcie *B*.




**Definicja**

***Wektorem o długości n*** nazwiemy układ liczb rzeczywistych postaci $[a_1, a_2, ..., a_n]$; gdzie $a_i$ oznacza różnicę odpowiednich współrzędnych punktów *A* i *B*.

liczby $a_1, a_2, ..., a_n$ są ***współrzędnymi wektora***.

Oznaczenia wektora: $\mathbf{a}$, $\underline{a}$, $\vec{AB}$

***Przestrzeń wektorowa n – wymiarowa -*** $R^n$

- ***Działania na wektorach***

**Definicja**

***Długością*** lub ***modułem wektora*** $\vec{AB}$, oznaczanym przez $\left|\vec{AB}\right|$ lub *AB,* nazywamy długość odcinka $\overline{AB}$.

***Wielkości określające wektor:***

- **Kierunek wektora**

Jeżeli koniec *B* wektora $\vec{AB}$ nie pokrywa się z jego początkiem *A* to mówimy o ***kierunku wektora,*** utożsamiając ten kierunek z kierunkiem prostej wyznaczonej przez punkty *A* i *B*.

Przypominamy: ***kierunek prostej*** jest to ta jej własność, którą mają wszystkie proste do niej równoległe i tylko te proste.

- **Zwrot wektora**

Prostą *AB* można wtedy skierować nadając jej zwrot w wyniku przyjęcia umowy dotyczącej następstwa punktów uznanego za dodatnie. W ten sposób nadajemy wektorowi $\vec{AB}$ ***zwrot*** zgodny ze zwrotem skierowanej prostej *AB*, na której *A* poprzedza *B*.

- **<u>Długość wektora</u>**

Dwa punkty $P_1(x_1, y_1, z_1)$ i $P_2(x_2, y_2, z_2)$ wyznaczają odcinek $\overline{P_1P_2}$, którego długość $P_1P_2$ obliczamy ze wzoru:

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

***Zastosowanie wektorów***

- *fizyka: natężenie pola elektrycznego, prędkość, przyśpieszenie, natężenie pola magnetycznego, linie sił pola magnetycznego*
- *grafika komputerowa: kwantyzacja wektorowa – metoda kompresji danych wykorzystująca analizę skupień zbioru danych wielowymiarowych*
- *analiza danych*

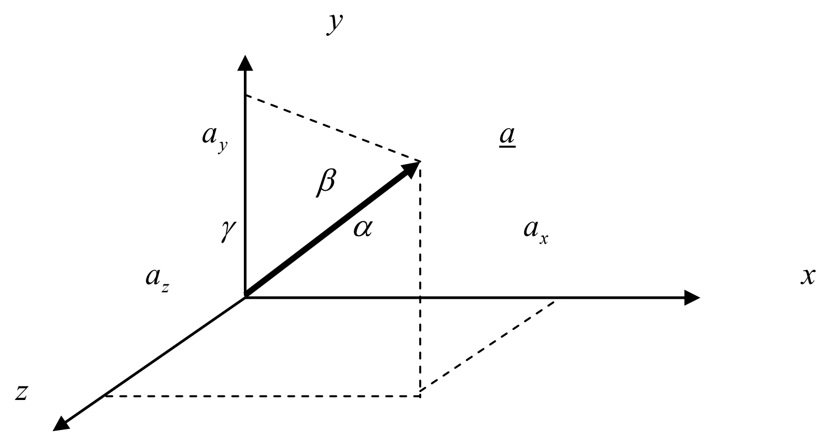
**<u>Definicja</u>**

***Kątami kierunkowymi wektora <u>a</u>*** w kartezjańskim ***układzie współrzędnych*** nazywamy kąty $\alpha, \beta, \gamma$;
jakie ten wektor tworzy z kolejnymi osiami układu współrzędnych.

*Współrzędne wektora <u>a</u> wyznaczone przez kosinusy kierunkowe*

$$\underline{a} = [\, a_x, a_y, a_z \,]$$

$a_x = a \cos\alpha$, $\quad$ $a_y = a \cos\beta$, $\quad$ $a_z = a \cos\gamma$




**<u>Definicja</u>**

***Wersorem*** (lub wektorem jednostkowym) nazywamy każdy wektor o długości jeden.

Wynika, że współrzędne wersora są równe jego kolejnym kosinusom kierunkowym

$$\hat{a} = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$$

**Definicja**

***Wersorem niezerowego wektora*** $\underline{a}=[a_x, a_y, a_z]$, oznaczanym przez $\hat{a}$ nazywamy wersor zgodnie równoległy z tym wektorem, przy czym

$$\hat{a} = \left[a_x / a,\ a_y / a,\ a_z / a\right], \qquad \text{gdy } a \neq 0$$

Mówimy także, że wektor $\hat{a}$ jest ***wektorem unormowanym***; operację prowadzącą od wektora niezerowego do jego wersora nazywamy ***normowaniem wektora.***

**Definicja**

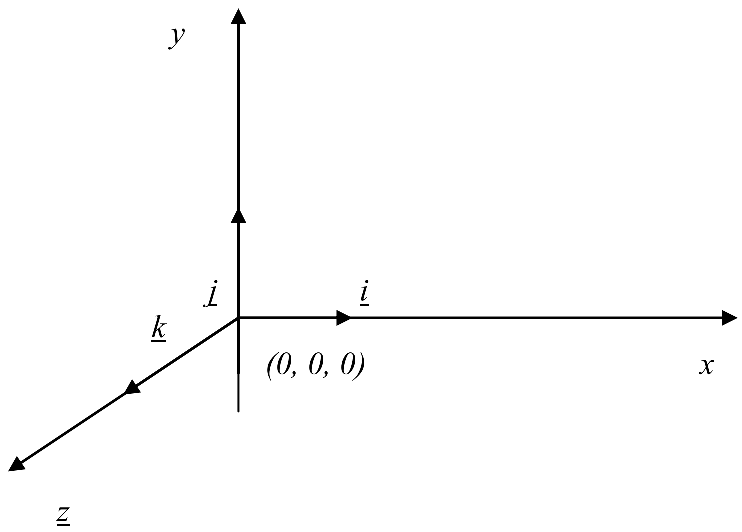
***Wersorem osi liczbowej s***, oznaczanym przez $\hat{s}$, nazywamy wersor zgodnie równoległy z tą osią.

Jeżeli więc kątami kierunkowymi osi $s$ są odpowiednio kąty $\alpha, \beta, \gamma$ co zapisujemy $s(\alpha, \beta, \gamma)$, to

$$\hat{s} = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$$

Wersory osi układu kartezjańskiego *OXYZ*, nazywane także ***wersorami układu kartezjańskiego***, oznaczamy odpowiednio przez $\underline{i}$, $\underline{j}$ oraz $\underline{k}$, przy czym

$$\underline{i} = [1;0;0], \qquad \underline{j} = [0;1;0], \qquad \underline{k} = [0;0;1]$$



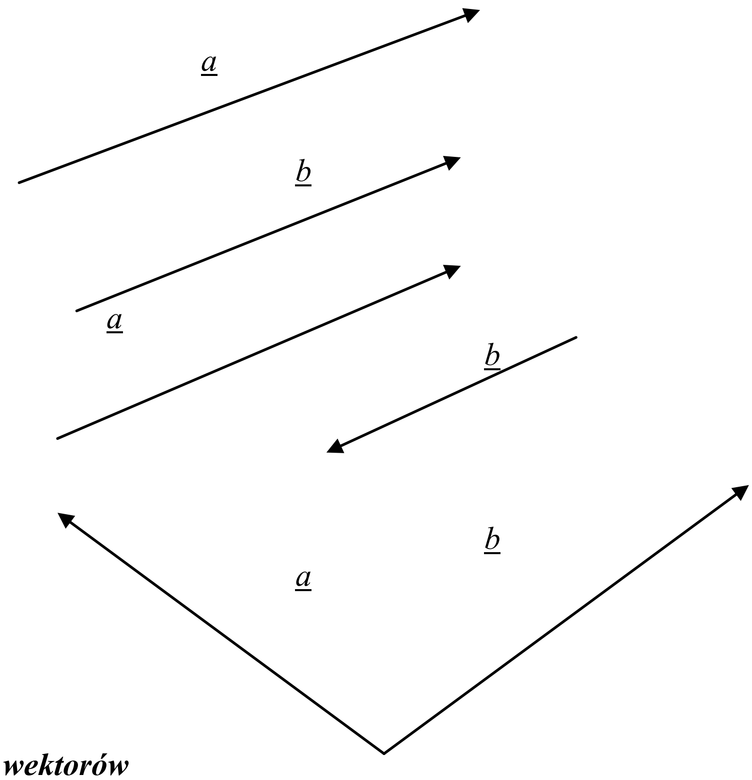

**Definicja**

***Kątem niezerowych wektorów*** $\underline{a}$ *i* $\underline{b}$, oznaczanym przez $\langle(\underline{a}, \underline{b})$ lub krótko $(\underline{a}, \underline{b})$, nazywamy kąt, jaki tworzy jeden z tych wektorów z osią zgodnie równoległą do drugiego z wektorów.

Z definicji tej wynika, że *kąt* $(\underline{a}, \underline{b})$ = *kąt* $(\underline{b}, \underline{a})$

**Uwaga**

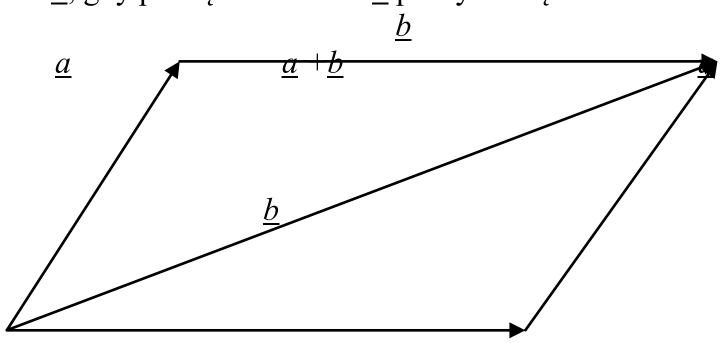
- Gdy dwa niezerowe wektory są *zgodnie równoległe*, co oznaczamy przez $\underline{a} \uparrow\uparrow \underline{b}$, to ich kąt jest równy zeru;
- Gdy dwa niezerowe wektory są *przeciwnie równoległe*, co oznaczamy przez $\underline{a} \uparrow\downarrow \underline{b}$, to ich kąt wynosi $\pi$ ;
- W przypadku *nierównoległości* wektorów ich kąt spełnia nierówności: $0 < kąt\ (\underline{a}, \underline{b}) < \pi$




- 
- ***Suma wektorów***

**Definicja**

***Sumą wektorów*** $\underline{a}$ ***i*** $\underline{b}$, oznaczoną przez $\underline{a} + \underline{b}$, nazywamy wektor o początku w początku wektora $\underline{a}$ i końcu w końcu $\underline{b}$, gdy początek wektora $\underline{b}$ pokrywa się z końcem wektora $\underline{a}$.



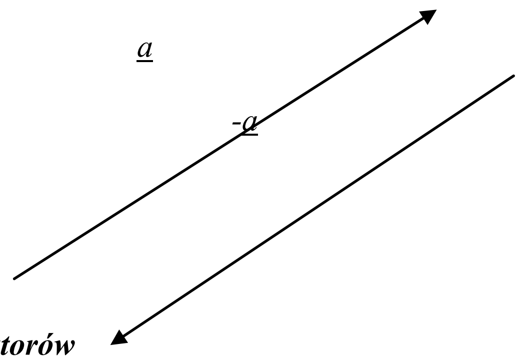
Z definicji sumy wynika natychmiast, że $\underline{a} + \underline{b}$ jest przekątną równoległoboku zbudowanego na wektorach $\underline{a}$ i $\underline{b}$.

**Twierdzenie**

- Dodawanie wektorów jest przemienne
$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$$

- Dodawanie wektorów jest łączne
$$(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}=\underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})$$

- Elementem neutralnym dodawania wektorów jest wektor $\underline{0}$
$$\underline{a} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{a} = \underline{a}$$
- Dla każdego wektora $\underline{a}$ istnieje jedyny *wektor przeciwny* do niego, oznaczony przez $-\underline{a}$.
*Własności wektora* $-\underline{a}$*:*
  1. $\left|-\underline{a}\right| = \left|\underline{a}\right|$
  2. *zwrot wektora* $-\underline{a}$ *jest przeciwny niż zwrot wektora* $\underline{a}$
  3. *kierunek wektora* $-\underline{a}$ *jest taki sam jak kierunek wektora* $\underline{a}$




- ***Odejmowanie wektorów***

Korzystając z oczywistej własności dodawania:
$$(\underline{a} = \underline{b}) \Rightarrow (\underline{a} + \underline{c} = \underline{b} + \underline{c})$$

**Definicja**
***Różnica wektorów*** $\underline{a}$ ***i*** $\underline{b}$ ***(odejmowanie wektora*** $\underline{b}$ ***od wektora*** $\underline{a}$***)*** $\Leftrightarrow$ dodawanie do wektora $\underline{a}$ wektora przeciwnego do $\underline{b}$

$$\underline{a} + (-\underline{b}) = \underline{a} - \underline{b}$$
- ***Iloczyn wektora i liczby***
- 
- ***Definicja***

***Iloczynem różnej od zera liczby*** $\lambda$ ***i niezerowego wektora*** $\underline{a}$ nazywamy wektor o długości $|\lambda| a$ zgodnie równoległy z wektorem $\underline{a}$ gdy $\lambda > 0$, a przeciwnie równoległy gdy $\lambda < 0$; w przypadku gdy $\underline{a} = \underline{0}$ lub $\lambda = 0$ iloczyn $\lambda \underline{a} = \underline{0}$.

Z powyższej definicji wynika, że jeżeli $\hat{a}$ jest wersorem niezerowego wektora $\underline{a}$ o długości *a*, to $\underline{a} = a\ \hat{a}$

$$\hat{a} = \frac{1}{a}\underline{a} = \left[a_x / a;\ a_y / a;\ a_z / a\right]$$

oraz, że

$\lambda(\mu \underline{a}) = (\lambda\mu)\underline{a}$, $\lambda, \mu$ - dowolne liczby

Iloczyn wektora i liczby jest rozdzielny względem dodawania liczb oraz względem dodawania wektorów

$$(\lambda + \mu)\underline{a} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{a}$$

$$\lambda (\underline{a} + \underline{b}) = \lambda \underline{a} + \lambda \underline{b}$$

**Twierdzenie**

Rzut na osi iloczynu wektora przez liczbę jest równy rzutowi tego wektora na tę oś pomnożonemu przez tę liczbę

$$rzut_s\left(\lambda \underline{a}\right) = \lambda rzut_s\, \underline{a}$$

$$rzut\ (\lambda\ \underline{a})$$

**Twierdzenie**

Współrzędna iloczynu liczby i wektora na osi jest równa iloczynowi tej liczby i współrzędnej tego wektora na tej osi

$$wsp_s\ (\lambda\ \underline{a}) = \lambda\ wsp_S\ \underline{a}$$

tzn. $\underline{a} = [a_1,..., a_k]$ to: c · $[a_1,..., a_k] = [ca_1,...,ca_k]$

***LINIOWA NIEZALEŻNOŚĆ WEKTORÓW***

**Definicja**

**Kombinacją liniową wektorów** $\underline{a}_i$ **,** i = 1, 2, ...,n *nazywamy wektor postaci*

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{a}_i = \lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{a}_n$$

gdzie $\lambda_i$, *i =1, 2, ... , n* są liczbami rzeczywistymi.

**Przykład**

Kombinacje liniowe wektorów

$$\alpha \underline{a},\ \underline{a} + \underline{b},\ \alpha \underline{a} + \beta \underline{b}$$

**Przykład**

$[4, 5, -8] = [0, 1, 0] + 2[2, 2, -4]$

$4[1, 2, 3] + 5[-3, 4, 2] - 4[1, 0, 1] = [-15, 28, 18]$

Przykład

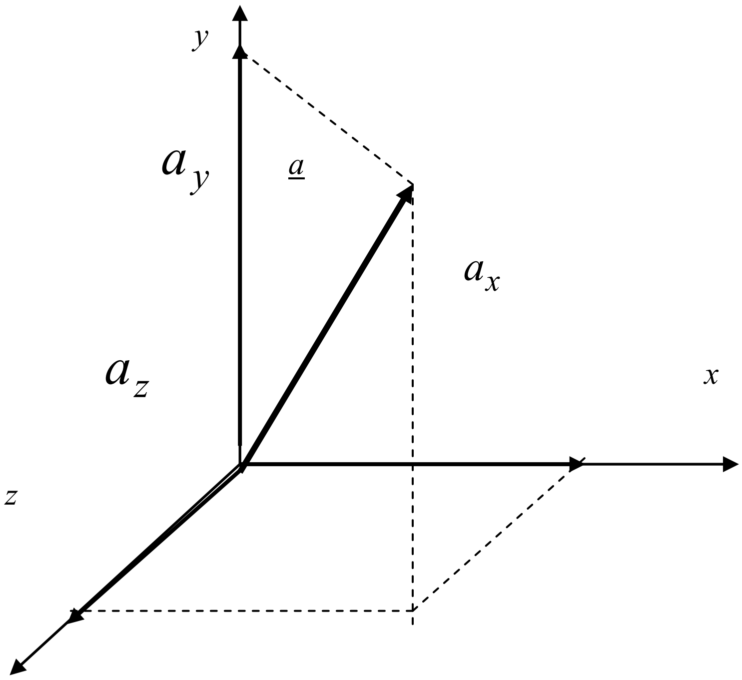
***Rozkład wektora $\underline{a}$ na współrzędne kartezjańskie***

*Jeżeli wektor $\underline{a} = [a_x, a_y, a_z]$, to rzutami wektora $\underline{a}$ na osie układu kartezjańskiego są wektory*

$$\underline{a_x} = [a_x, 0, 0],\ \underline{a_y} = [0, a_y, 0],\ \underline{a_z} = [0, 0, a_z]$$

*Wektor $\underline{a}$ możemy zapisać w postaci*

$$\underline{a} = \underline{a_x} + \underline{a_y} + \underline{a_z}$$




Każdy wektor możemy przedstawić w postaci iloczynu długości tego wektora i jego wersora

$\underline{a_x} = a_x \underline{i},\quad \underline{a_y} = a_y \underline{j},\quad \underline{a_z} = a_z \underline{k}$ *gdzie $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ są wesorami osi odpowiednio OX, OY, OZ*

*A zatem* $\underline{a} = a_x \underline{i} + a_y \underline{j} + a_z \underline{k}$

**<u>Wniosek</u>**

*Każdy wektor możemy przedstawić w postaci kombinacji liniowej wersorów układu kartezjańskiego.*

**<u>Przykład</u>**

[*5, 3, 2*] = *5*[*1, 0, 0*] + *3*[*0, 1, 0*] + *2*[*0, 0, 1*]

**<u>Definicja</u>**

Wektory $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ są ***liniowo niezależne*** wtedy

i tylko wtedy gdy dla każdego układu $c_1, c_2, \dots, c_k$ liczb

rzeczywistych, jeżeli $c_1 \underline{a}_1 + c_2 \underline{a}_2 + \dots + c_k \underline{a}_k = 0$ to $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$

Jeżeli wektory $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ nie są liniowo niezależne, to mówimy, że są one ***liniowo zależne.***

**<u>Przykład</u>**

*Jeżeli wektory* $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ *są liniowo zależne, to istnieją liczby* $c_1, c_2$*; gdzie* $c_1 \neq 0$ lub $c_2 \neq 0$*,*

*takie, że* $c_1 \underline{a}_1 + c_2 \underline{a}_2 = 0$

*Jeśli np.* $c_1 \neq 0$ *to wtedy* $\underline{a}_1 = -\frac{c_2}{c_1} \underline{a}_2$

**<u>Definicja</u>**

Dwa wektory są ***równoległe*** jeżeli jeden z nich jest pewną kombinacją liniową drugiego.

*Jeżeli wektory* $\underline{a}_1, \underline{a}_2, a_3$ *są liniowo zależne, to istnieją*

$c_1, c_2, c_3$ *takie, że* $c_1 \neq 0$ *lub* $c_2 \neq 0$ *lub* $c_3 \neq 0$ *oraz*

$$c_1 \underline{a}_1 + c_2 \underline{a}_2 + c_3 \underline{a}_3 = 0$$

Jeżeli np. $c_1 \neq 0$ to $\underline{a}_1 = -\frac{c_2}{c_1} \underline{a}_2 - \frac{c_3}{c_1} \underline{a}_3$ a zatem wektor $\underline{a}_1$ jest liniową kombinacją pozostałych.

**Twierdzenie**

Układ wektorów $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ jest ***liniowo zależny***

wtedy i tylko wtedy, gdy pewien spośród wektorów

$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ jest liniową kombinacją pozostałych.

**Przykład**

Wektory [1, 2, 3], [-3, 4, 2], [1, 0, 1] , [-15, 28, 18] są liniowo zależne

4[1, 2, 3] + 5[-3, 4, 2] – 4[1, 0, 1] = [-15, 28, 18]

- ***Kryterium liniowej niezależności wektorów***

Układ wektorów $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ o długości n jest ***liniowo niezależny*** wtedy i tylko wtedy,

gdy układ równań:

$$A \cdot c = 0$$

gdzie A jest macierzą o kolumnach $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ ,

*tzn.*

$$A = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k] \quad i \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}$$

*ma dokładnie jedno rozwiązanie postaci:* $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$

*z twierdzenia Kroneckera – Capelliego, wynika, że wtedy* rząd A = k

**Twierdzenie**

Dla układu wektorów $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ rozważmy macierz *A* o kolumnach $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ .

Układ wektorów $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ jest ***liniowo niezależny*** jeżeli *rząd A = k.*

**Twierdzenie**

Żaden układ $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_{n+1}$ wektorów długości *n* nie jest liniowo niezależny.

**Dowód**

Macierz $[\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_{n+1}]$ ma wymiar $(n+1) \times n$, a zatem nie może mieć rzędu równego $n+1$.

**Twierdzenie**

Układ wektorów $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ o długości $n$ jest ***liniowo niezależny*** wtedy i tylko wtedy gdy

$$\det A(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n) \neq 0$$

**Przykład**

*Sprawdzić, czy wektory*

$[1, 2, 3]$, $[2, 3, 4]$, $[3, 4, 5]$

*są liniowo niezależne*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

*Det A = 0* $\Rightarrow$ *wektory są liniowo zależne.*

**BAZA W PRZESTRZENI WEKTOROWEJ**

***PRZYPOMNIENIE***

***Definicja***

*Wektory* $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ *są* ***liniowo niezależne*** *wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego układu* $c_1, c_2, \ldots, c_k$ *liczb rzeczywistych, jeżeli*

$$c_1 \underline{a}_1 + c_2 \underline{a}_2 + \ldots + c_k \underline{a}_k = 0$$

*to*

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$$

*Jeżeli wektory* $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ *nie są liniowo niezależne, to mówimy, że są one* ***liniowo zależne.***

***Przykład***

*Jeżeli wektory* $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ *są liniowo zależne, to istnieją liczby* $c_1, c_2$*; gdzie* $c_1 \neq 0$ lub $c_2 \neq 0$,

*takie, że* $c_1 \underline{a}_1 + c_2 \underline{a}_2 = 0$

*Jeśli np.* $c_1 \neq 0$ *to wtedy* $\underline{a}_1 = -\frac{c_2}{c_1} \underline{a}_2$

**Definicja**

Każdy układ wektorów z $R^n$ o własności

$$\det A(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n) \neq 0$$

nazwiemy ***bazą w przestrzeni wektorowej*** $R^n$.

**Twierdzenie**

Niech wektory $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ będą bazą w przestrzeni $R^n$.

Każdy wektor $\underline{b}$ z tej przestrzeni jest kombinacją liniową wektorów $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$, tzn.

$$\underline{b} = c_1 \cdot \underline{a}_1 + c_2 \cdot \underline{a}_2 + \ldots c_n \cdot \underline{a}_n$$

współczynniki $c_1, c_2, \ldots, c_n$ są wyznaczone jednoznacznie

i nazywają się ***współrzędnymi wektora*** $\underline{\boldsymbol{b}}$ w tej bazie.

Z twierdzenia Cramera wynika, że układ równań

$$\underline{b} = c_1 \cdot \underline{a}_1 + c_2 \cdot \underline{a}_2 + \ldots c_n \cdot \underline{a}_n$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

**Przykład**
[*-15, 28, 18*] = *4*[*1, 2, 3*] + *5* [*-3, 4, 2*] - *4*[*1, 0, 1*]

*Wektor* [*-15, 28, 18*] *ma współrzędne* [*4, 5, -4*] *w bazie złożonej z wektorów* [*1, 2, 3*], [*-3, 4, 2*], [*1, 0, 1*]

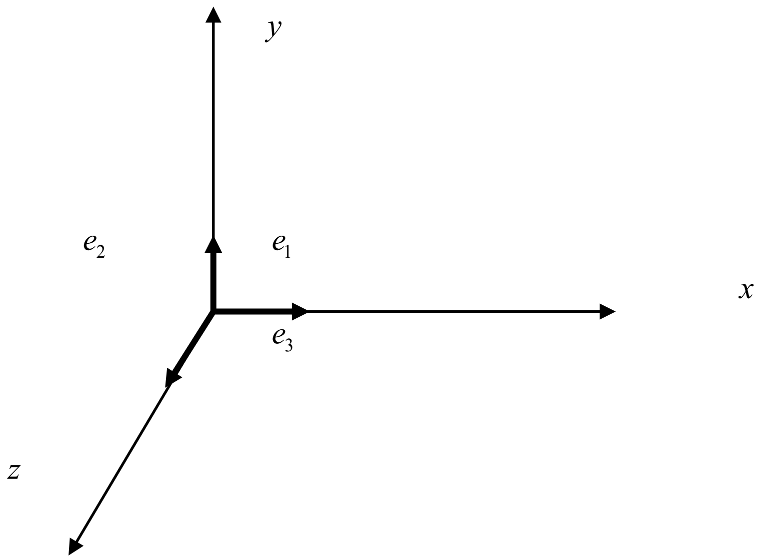
**Baza w przestrzeni $R^n$ - układ n wektorów**

**Baza kanoniczna w przestrzeni $R^n$**

$$\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$$

gdzie

$\underline{e}_1 = (1,0,\dots,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1,0,\dots,0)$, ......., $\underline{e}_n = (0,0,\dots,1)$




*Każdy wektor* $\underline{a} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ *jest reprezentowany w*

*bazie kanonicznej jako* $\underline{a} = x_1 \cdot \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + \dots + x_n \underline{e}_n$ .

**Przykład**
**Znaleźć współrzędne wektora**

$$\underline{d} = [-1, -2, 3]$$

w bazie złożonej z wektorów

$$\underline{a} = [1, 1, 0],\ \underline{b} = [1, 0, 1],\ \underline{c} = [0, 1, 1] \text{ w } R^3$$

*Oznaczamy szukane współrzędne przez x, y, z;*
muszą one spełniać równanie:

$$x[1, 1, 0] + y[1, 0, 1] + z\,[0, 1, 1] = [-1, -2, 3]$$

*a zatem*

$$x + y = -1$$
$$x + z = -2$$
$$y + z = 3$$

*stąd:* $x = -3,\ y = 2,\ z = 1$

**<u>Przykład</u>**

Wektor $\underline{a}$ ma współrzędne [*2, 1, -3*] w bazie złożonej z wektorów [*2, 3, 0*], [*4, 2, 3*], [*1, 1, 1*].

Obliczyć współrzędne wektora $\underline{a}$ w bazie

[*4, 0, 1*], [*0, 2, 3*], [*2, 1, 0*].

Oznaczamy szukane współrzędne przez x, y, z

$$2[2, 3, 0] + [4, 2, 3] - 3\,[1, 1, 1] =$$
$$= x\,[4, 0, 1] + y[0, 2, 3] + z[2, 1, 0]$$

Układ trzech równań z trzema niewiadomymi:

$$4x + 2z = 5$$
$$2y + z = 5$$
$$x + 3y = 0$$

Postać macierzowa układu:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jest to układ Cramera, gdyż wyznacznik macierzy głównej układu jest różny od zera, a zatem z twierdzenia Cramera rozwiązanie jest postaci

$$x = -\frac{15}{16}, \qquad y = \frac{5}{16}, \qquad z = \frac{70}{16}$$

***Podsumowanie***

*Jeżeli współrzędne wektora $\underline{a}$ w kolejnych bazach wynoszą odpowiednio:*

$[x_1, x_2, x_3]$ *w bazie* $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$

$[y_1, y_2, y_3]$ *w bazie* $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$

$[z_1, z_2, z_3]$ *w bazie* $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3$ *itd.*

*wtedy*

$$x_1 \cdot \underline{a}_1 + x_2 \cdot \underline{a}_2 + x_3 \, \underline{a}_3 =$$

$$= y_1 \cdot \underline{b}_1 + y_2 \cdot \underline{b}_2 + y_3 \cdot \underline{b}_3 = z_1 \cdot \underline{c}_1 + z_2 \cdot \underline{c}_2 + z_3 \cdot \underline{c}_3$$