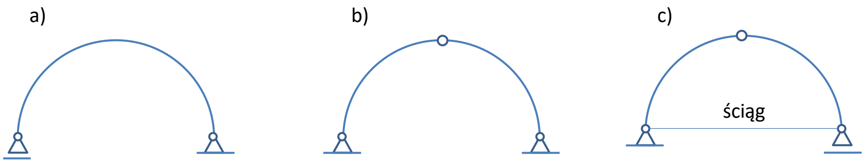
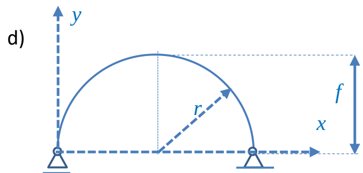
ŁUKI – wyznaczanie sił wewnętrznych

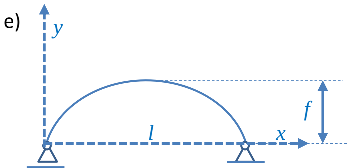
1. Łukiem nazywamy pręt zakrzywiony lub układ takich prętów.
2. Zależnie od sposobu podparcia łuki statycznie wyznaczalne mogą być:
    - swobodnie podparte rys. a),
    - trójprzgubowe, trójprzegubowe ze ściągiem rys. b), c),
    - wspornikowe



3. Rodzaj krzywizny, powoduje konieczność stosowania odmiennych zależności geometrycznych w odniesieniu do łuków kołowych rys. d), parabolicznych rys. e), sinusoidalnych i eliptycznych.

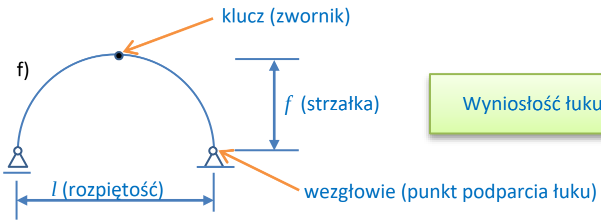


$y = f - r + \sqrt{r^2 - (x - \frac{l}{2})^2}$ - równanie łuku kołowego



$y = \frac{4f}{l^2}x(l - x)$ - równanie łuku parabolicznego

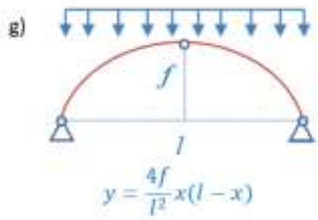
4. Elementy łuku rys. f).

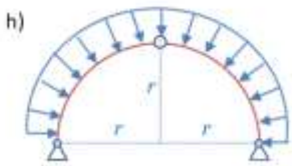


Wyniosłość łuku: łuki wyniosłe $\frac{f}{l} \geq \frac{1}{5}$; łuki płaskie $\frac{f}{l} < \frac{1}{5}$

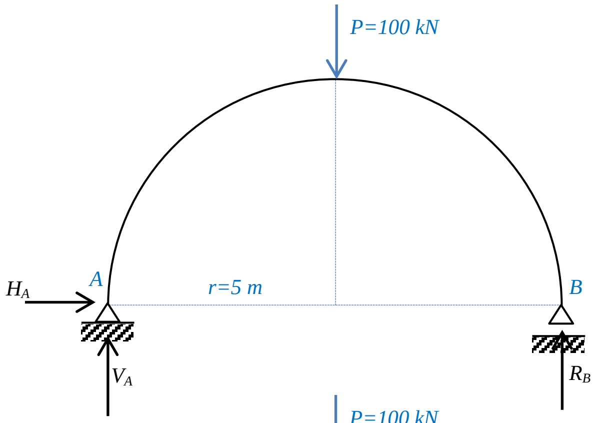
5. Oś łuku, która umożliwia uzyskanie minimalnych wymiarów przekroju poprzecznego pręta łuku przy zadanym obciążeniu nazywana jest *racjonalną osią łuku*.
   Można tak dobrać oś łuku, aby momenty M były równe zeru. Najbardziej racjonalną osią łuku jest taka, w której występują tylko siły normalne (ściskające) N< 0.
   Dzięki temu łuki, nawet o dużej rozpiętości, mogą być wykonywane (przy zapewnieniu nieprzesuwności podpór względem siebie) z materiałów kruchych (np. mur ceglany lub kamienny, beton niezbrojony).

   Racjonalną osią łuku trójprzegubowego obciążonego równomiernie na całej długości w pionie jest *parabola drugiego stopnia* rys. g). Racjonalną osią łuku trójprzegubowego obciążonego na całej długości w kierunku prostopadłym do osi łuku jest *koło* rys h).





6. Obliczanie sił wewnętrznych w łuku kołowym.



Obliczenie reakcji:

$$\sum F_x = 0 \;\rightarrow\; H_A = 0kN$$

$$\sum M_A = 0 \;\rightarrow\; Pr - R_B 2r = 0$$

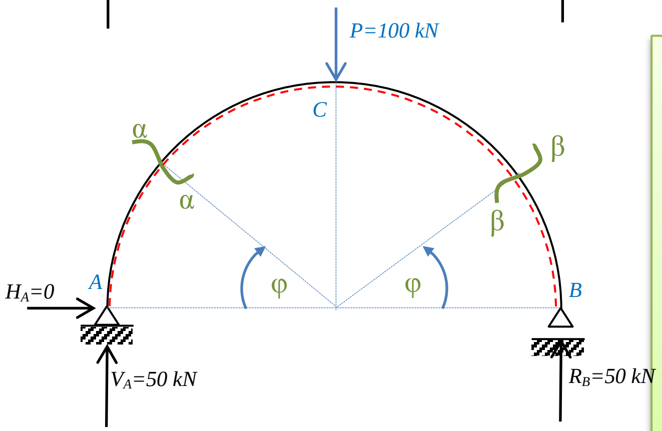
500 - 10R_B=0

R_B=50 kN

$$\sum F_y = 0 \;\rightarrow\; V_A - P + R_B = 0$$

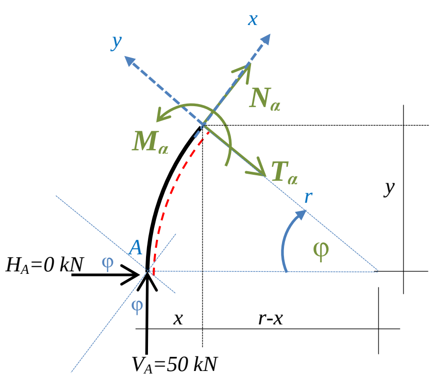
V_A – 100+50=0

V_A=50 kN



Rysujemy „wyróżnione włókna”----------- *(dla łuku mogą to być włókna wewnątrz).*

Wyznaczamy dla charakterystycznych przedziałów funkcje sił wewnętrznych.
Dla tego łuku mamy 2 przedziały A-C i B-C.
Wprowadzamy przekroje dla każdego przedziału α-α i β-β.
Położenie przedziału określone jest przez kąt φ, który zmienia się: dla przedziału A-C od 0 do 90^0 i dla przedziału B-C od 0 do 90^0.



Funkcje sił wewnętrznych dla przedziału A-C:

- Rysujemy przedział A-C do przekroju normalnego α-α. Położenie przekroju opisujemy zmienną φ w zakresie → $0 \le \varphi \le 90^0$
- Rysujemy układ współrzędnych x,y w przekroju α-α.
- Oznaczamy kąt φ między reakcjami a osiami x i y.
- Ustalamy zależności między położeniem przekroju przez kąt φ a zmiennymi x i y:

$$\frac{r-x}{r} = cos\varphi \rightarrow x = r(1 - cos\varphi)$$

$$\frac{y}{r} = sin\varphi \rightarrow y = rsin\varphi$$

- Funkcja siły normalnej:

  $\sum F_x = 0 \;\rightarrow N_\alpha + V_A cos\varphi + H_A sin\varphi = 0 \;\rightarrow$ $\quad \boldsymbol{N_\alpha = -50 \cdot cos\varphi}$

  Dla $\varphi = 0^0$; N_α= - 50 kN

  Dla $\varphi = 90^0$; N_α= 0 kN

- Funkcja siły poprzecznej:

  $\sum F_y = 0 \;\rightarrow -T_\alpha + V_A sin\varphi - H_A cos\varphi = 0 \;\rightarrow$ $\quad \boldsymbol{T_\alpha = 50 \cdot sin\varphi}$

  Dla $\varphi = 0^0$; T_α= 0 kN

  Dla $\varphi = 90^0$; T_α= 50 kN

- Funkcja momentu zginającego:

  $\sum M_{\alpha-\alpha} = 0$

  $-M_\alpha - H_A \cdot y + V_A \cdot x = 0 \;\rightarrow \qquad M_\alpha = 50x \;\; ponieważ \quad x = 5(1 - cos\varphi) \; otrzymamy$

  $\boldsymbol{M_\alpha = 250(1 - cos\varphi)}$

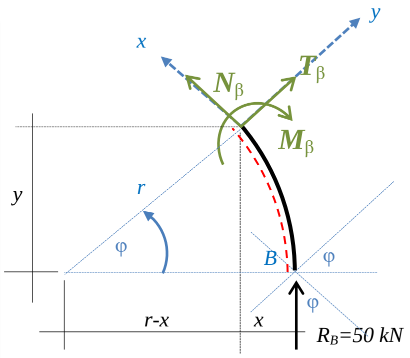
  Dla $\varphi = 0^0$; M_α= 0 kNm

  Dla $\varphi = 90^0$; M_α= 250 kNm >0 rysujemy po stronie włókien wyróżnionych.

  W celu dokładnego narysowania wykresów zaleca się ustalenie wartości sił przekrojowych np. co 15^0 .

Funkcje sił wewnętrznych dla przedziału B-C:

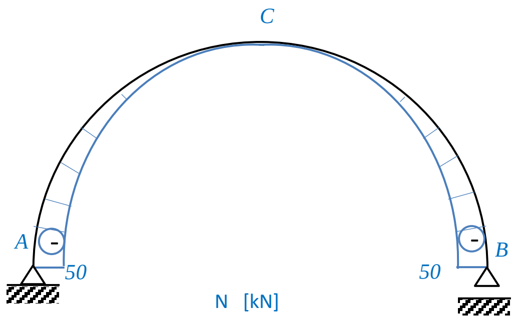
- Rysujemy przedział B-C do przekroju normalnego β-β. Położenie przekroju opisujemy zmienną φ w zakresie $0 \le \varphi \le 90^0$
- Rysujemy układ współrzędnych x,y w przekroju β-β.
- Oznaczamy kąt φ między reakcjami a osiami x i y.
- Zależności między położeniem przekroju przez kąt φ a zmiennymi x i y tak jak poprzednio wynoszą:
  $x = r(1 - cos\varphi); \quad y = rsin\varphi$

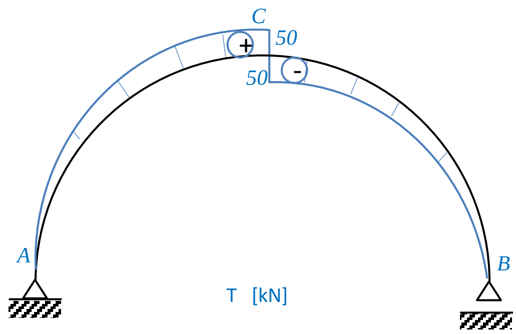


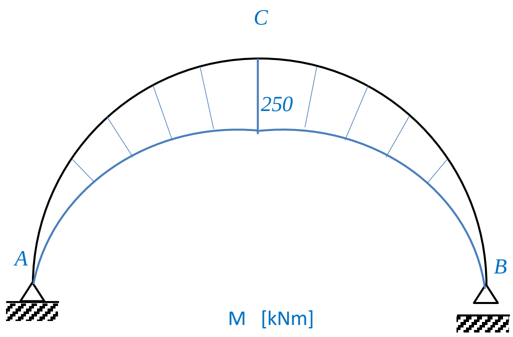
- Funkcja siły normalnej:
  $\sum F_x = 0 \;\rightarrow N_\beta + R_B cos\varphi = 0 \;\rightarrow \qquad \boldsymbol{N_\beta = -50 \cdot cos\varphi}$
  Dla $\varphi = 0^0$; N_β= - 50 kN
  Dla $\varphi = 90^0$; N_β= 0 kN

- Funkcja siły poprzecznej:
  $\sum F_y = 0 \;\rightarrow T_\alpha + R_B sin\varphi = 0 \;\rightarrow \qquad \boldsymbol{T_\beta = -50 \cdot sin\varphi}$
  Dla $\varphi = 0^0$; T_β= 0 kN
  Dla $\varphi = 90^0$; T_β= -50 kN

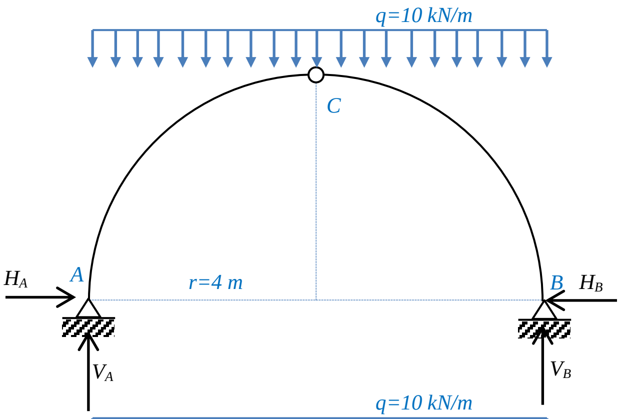
- Funkcja momentu zginającego:
  $\sum M_{\beta-\beta} = 0$
  $M_\beta - R_B \cdot x = 0 \;\rightarrow \qquad M_\beta = 50x \;\; ponieważ \quad x = 5(1 - cos\varphi) \; otrzymamy$
  $\boldsymbol{M_\beta = 250(1 - cos\varphi)}$
  Dla $\varphi = 0^0$; M_β= 0 kNm
  Dla $\varphi = 90^0$; M_β= 250 kNm >0 rysujemy po stronie włókien wyróżnionych.
  W celu dokładnego narysowania wykresów zaleca się ustalenie wartości sił przekrojowych np. co 15^0 .





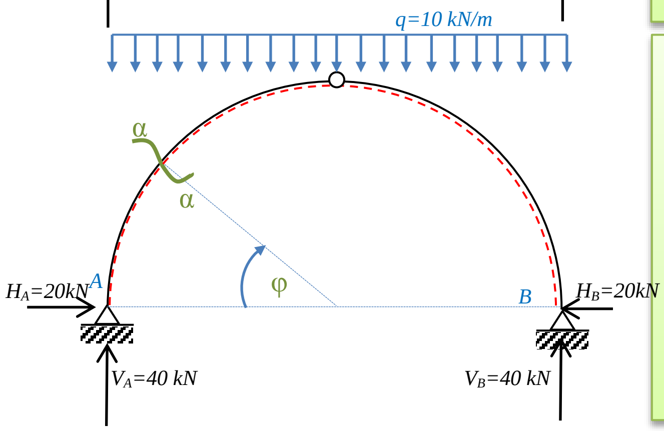


7. Obliczanie sił wewnętrznych w łuku kołowym trójprzegubowym równomiernie obciążonym.



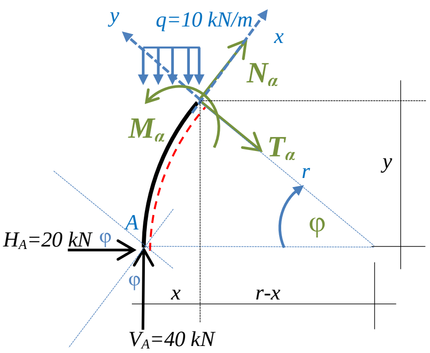
Obliczenie reakcji: W łukach trójprzegubowych obciążenie pionowe wywołuje powstanie poziomej reakcji zwanej ROZPOREM.

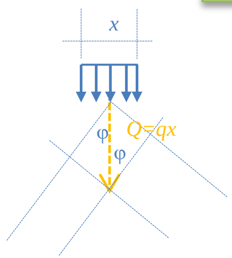
$$\sum M_A = 0 \rightarrow q2r \cdot r - V_B 2r = 0$$
$$320 - 8V_B = 0$$
$$V_B = 40\ \text{kN}$$
$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_A - 2qr + V_B = 0$$
$$V_A - 80 + 40 = 0$$
$$V_A = 40\ \text{kN}$$
$$\sum M_C^P = 0 \rightarrow qr \cdot \frac{r}{2} - V_B r + H_B r = 0$$
$$H_B = 20\ \text{kN} \qquad \sum F_x = 0 \rightarrow H_A = 20\ kN$$



Rysujemy „wyróżnione włókna”-----------
(dla łuku mogą to być włókna wewnątrz).
Wyznaczamy dla charakterystycznych przedziałów funkcje sił wewnętrznych.
Dla tego łuku mamy tylko 1 przedział A-B (przegub nie powoduje powstanie nowego przedziału). Wprowadzamy przekrój dla przedziału α-α.
Położenie przedziału określone jest przez kąt φ, który zmienia się od 0 do 180⁰.

Zależności geometryczne:
$x = r(1 - cos\varphi) \quad y = rsin\varphi$





Funkcje sił wewnętrznych dla przedziału A-B:

- Funkcja siły normalnej:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_\alpha + V_A cos\varphi + H_A sin\varphi - qxcos\varphi = 0 \rightarrow \qquad \boldsymbol{N_\alpha = -20sin\varphi - 40cos^2\varphi}$$

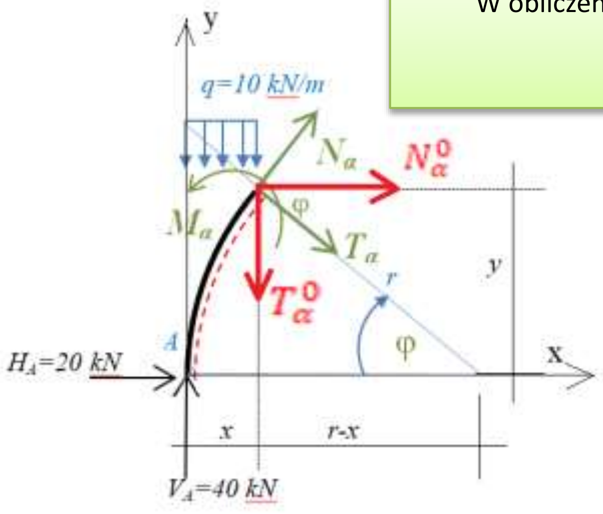
- Funkcja siły poprzecznej:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -T_\alpha + V_A sin\varphi - H_A cos\varphi - qxsin\varphi = 0 \rightarrow \qquad \boldsymbol{T_\alpha = -20cos\varphi + 40sin\varphi cos\varphi}$$

- Funkcja momentu zginającego:

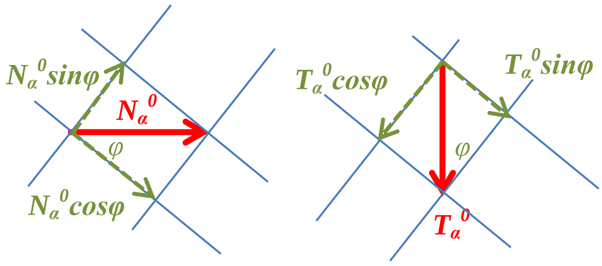
$$\sum M_{\alpha-\alpha} = 0$$
$$-M_\alpha - H_A \cdot y + V_A \cdot x - \frac{qx^2}{2} = 0 \rightarrow \qquad \boldsymbol{M_\alpha = 80 - 80sin\varphi - 80cos^2\varphi}$$

Wartości sił przekrojowych dla poszczególnych kątów φ zebrano w tabeli 1.



W obliczeniach łuku kołowego wykorzystuje się również zależności:

$$N_\alpha = N_\alpha^0 sin\varphi - T_\alpha^0 cos\varphi$$
$$T_\alpha = N_\alpha^0 cos\varphi + T_\alpha^0 sin\varphi$$



Gdzie N_α^0 i T_α^0 oznaczają siłę normalną i poprzeczną obliczone jak dla poziomej belki (względem układu xy – patrz rysunek powyżej):

- Funkcja siły normalnej:

$$\sum F_x = 0 \;\rightarrow\; N_\alpha^0 + H_A = 0 \;\rightarrow\; \qquad N_\alpha^0 = \mathbf{-20}$$

- Funkcja siły poprzecznej:

$$\sum F_y = 0 \;\rightarrow\; -T_\alpha^0 + V_A - qx = 0 \;\rightarrow\; \qquad T_\alpha^0 = \boldsymbol{40cos\varphi}$$

Uwzględniając zależności:

$$N_\alpha = N_\alpha^0 sin\varphi - T_\alpha^0 cos\varphi$$
$$T_\alpha = N_\alpha^0 cos\varphi + T_\alpha^0 sin\varphi$$

Otrzymamy:

$$\boldsymbol{N_\alpha = -20sin\varphi - 40cos^2\varphi}$$
$$\boldsymbol{T_\alpha = -20cos\varphi + 40sin\varphi cos\varphi}$$

Funkcję momentu wyznaczamy jak poprzednio:

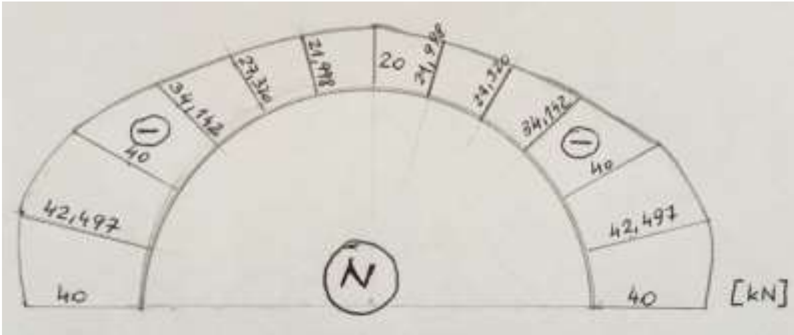
$$\sum M_{\alpha-\alpha} = 0$$

$$-M_\alpha - H_A \cdot y + V_A \cdot x - \frac{qx^2}{2} = 0$$

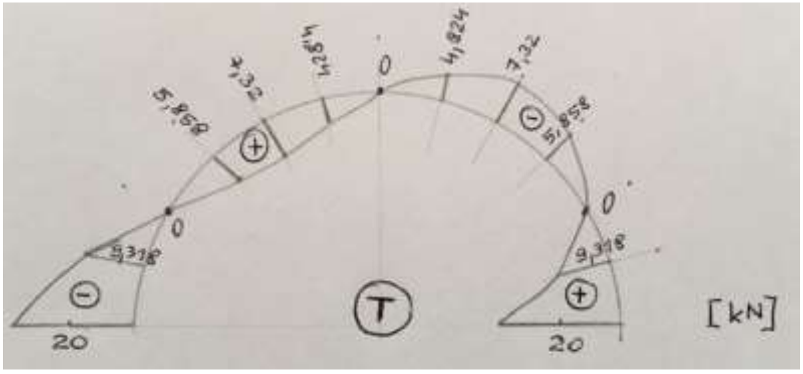
$$\boldsymbol{M_\alpha = 80 - 80sin\varphi - 80cos^2\varphi}$$

Tabela 1. Wartości sił przekrojowych zależnie od kąta φ:

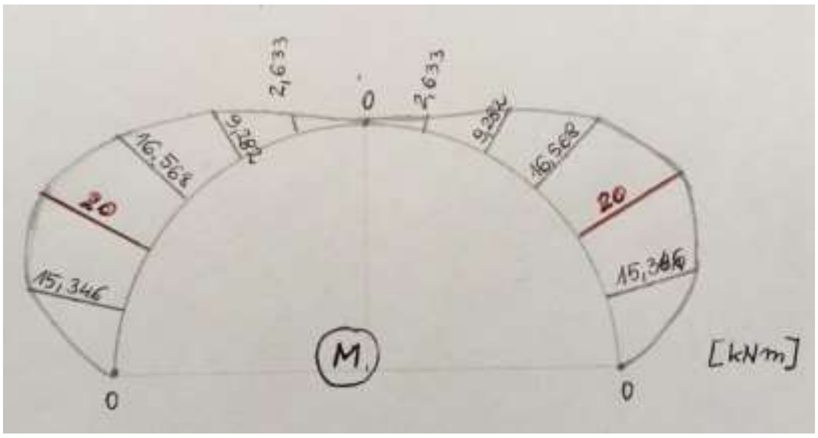
φ	0^0	15^0	30^0	45^0	60^0	75^0	90^0	105^0	120^0	135^0	150^0	165^0	180^0
N_α [kN]	-40	-42,497	-40	-34,142	-27,320	-21,998	-20	-21,998	-27,320	-34,142	-40	-42,497	-40
T_α[kN]	-20	-9,318	0	5.858	7,320	4,824	0	-4,824	-7,320	-5.858	0	9,318	20
M_α[kNm]	0	-15,346	-20 ekstremum	-16,568	-9,282	-2,633	0 przegub!	-2,633	-9,282	-16,568	-20 ekstremum	-15,346	0



Wykres sił normalnych



Wykres sił poprzecznych



Wykres momentów zginających